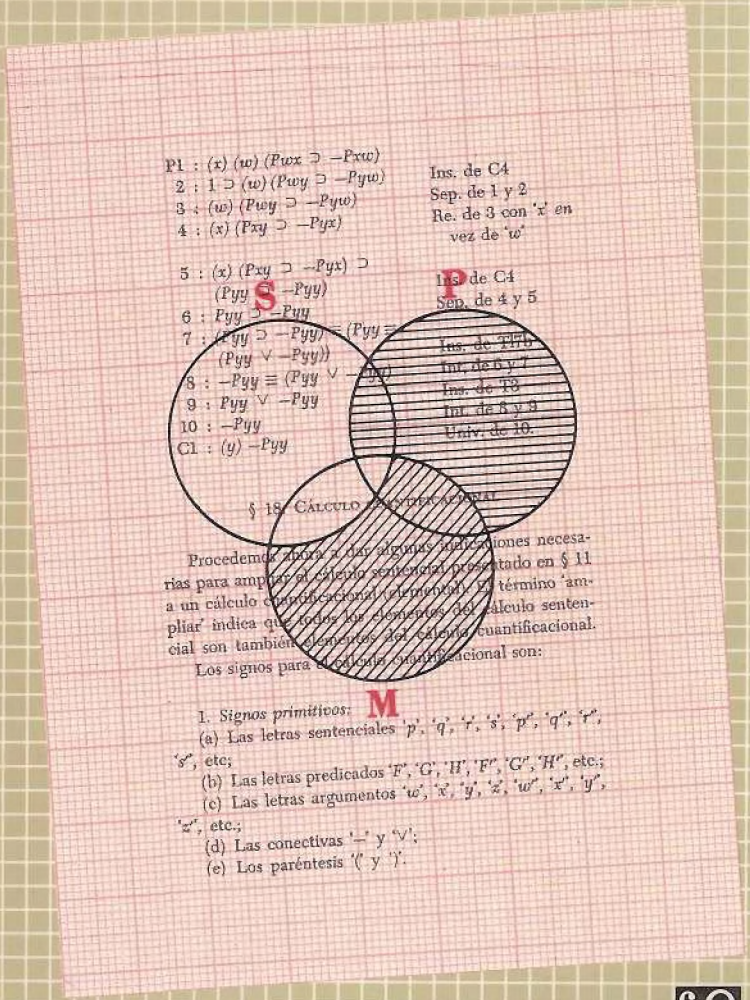
JOSÉ FERRATER MORA
HUGUES LEBLANC

LÓGICA MATEMÁTICA



cfe

Sección de Obras de Filosofía

•

LÓGICA MATEMÁTICA

JOSÉ FERRATER MORA Y HUGUES LEBLANC

LÓGICA MATEMÁTICA

FONDO DE CULTURA ECONÓMICA
México

Primera edición, 1955
Segunda edición, 1962
Undécima reimpresión, 1992

D. R. © 1955, Fondo de Cultura Económica
D. R. © 1987, Fondo de Cultura Económica, S. A. de C. V.
Av. de la Universidad, 975; 03100 México D. F.

ISBN 968-16-0450-4

Impreso en México

PRÓLOGO A LA PRIMERA EDICIÓN

Este libro ha sido escrito en estrecha colaboración por sus dos autores; ambos se hacen enteramente responsables de él tanto en lo que se refiere a su contenido como en lo que toca a su forma.

Su propósito ha sido presentar a los lectores de habla española, de una manera sucinta, clara y rigurosa, los temas fundamentales de la disciplina que unos llaman *lógica moderna*, otros *lógica simbólica*, otros —como aquí se hace— *lógica matemática*, y que nosotros preferiríamos llamar simplemente *lógica*.

Los temas tratados y el orden en que lo han sido se desprenden claramente del índice general; el volumen contiene, además, una bibliografía y un índice analítico de autores y materias.

El lector aún lego en la materia no debe sentir temor si al abrir este libro advierte que no escasean en él los símbolos. Si procede a su lectura desde el comienzo, sin saltar ningún párrafo, descubrirá que los símbolos, lejos de entorpecer su comprensión de nuestra disciplina, constituyen el único modo de entenderla derechamente. Una lógica matemática sin símbolos sería tan inconcebible como una aritmética sin cifras. Ahora bien, si los símbolos no escasean, tampoco sobreabundan. Se han empleado todos los necesarios, pero no más de los necesarios.

Nuestro libro no se adhiere a ninguna dirección filosófica determinada. No es necesario. La lógica matemática no es el órgano de ninguna escuela. Para usarla no es menester ser cientificista ni positivista; se puede ser tomista, marxista, fenomenólogo, existencialista. No pretendemos exponer ninguna doctrina filosófica, sino los rasgos fundamentales de una ciencia. Esperamos con ello contribuir a despertar en los lectores de lengua española

el interés por una disciplina que ocupa un puesto singularmente destacado en el saber contemporáneo.

El lector que desee completar su información sobre los temas presentados en este volumen, puede recurrir a las siguientes obras de sus dos autores: *Diccionario de filosofía*, artículos sobre lógica y metalógica (4ª ed., Editorial Sudamericana, S. A., Buenos Aires, 1958, 5ª ed., revisada y muy aumentada, en preparación), de José Ferrater Mora, y *An Introduction to Deductive Logic* (John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1955), de Hugues Leblanc. La primera contiene especialmente información de índole histórica; la segunda contiene especialmente información de naturaleza sistemática.

JOSÉ FERRATER MORA Y HUGUES LEBLANC

Bryn Mawr College,
Pennsylvania, EE.UU. de América.

NOTA A LA SEGUNDA EDICION

Para esta segunda edición se ha revisado el texto, depurándolo de errores; se ha ampliado la bibliografía, y se han introducido cuatro nuevas secciones: El formalismo en la lógica (§ 5 en la nueva numeración); La prueba en la lógica cuantificacional (§ 17); La deducción natural (§ 19) y Los conceptos de validez y de verdad (§ 46).

J.F.M. y H. L.

Bryn Mawr College,
Pennsylvania, EE.UU. de América.

I. NATURALEZA DE LA LÓGICA

§ 1. El lenguaje lógico

Condillac decía que la ciencia es un lenguaje bien hecho. De la lógica hubiera podido decir más: el que está mejor hecho de los lenguajes. Más que ningún otro se aproxima a un ideal inasequible: ser un lenguaje perfecto.

Que sea un lenguaje, es asunto muy debatido. Para nuestro propósito nos basta considerar el lenguaje como una entidad compuesta de una serie de sonidos, letras, gestos, señales, etc., capaces de comunicar un mensaje. En principio no importan, pues, los ingredientes del lenguaje. Ahora bien, de los lenguajes posibles nos interesa aquí uno: el lenguaje escrito. Consiste éste en un conjunto de signos, que pueden ser letras, vocablos, símbolos, cifras, etc. Los signos son agrupados en expresiones, las cuales pueden tener significación o carecer de ella. Así, 'el hombre es mortal' es una expresión. Pero son también expresiones 'el hombre es un para', 'el cuadrado redondo es verde', 'axt izm del', etc. La condición común de todas estas expresiones es tener una forma lineal, en la cual cada signo ocupa un lugar determinado. Una expresión no lineal —como un vocablo acentuado, una cifra con exponente, etc.— puede siempre reducirse a forma lineal. Sin esta condición no podría indicarse la posición de los signos en la expresión, y una ciencia general de los lenguajes escritos resultaría impracticable.

Los signos de que hablamos pueden ser divididos en dos grupos, que llamaremos, siguiendo a Rudolf Carnap, *signos-acontecimientos* y *signos-modelos*. Los signos-acontecimientos ocupan un lugar determinado en un tiempo determinado. Ejemplo de ellos es: la letra 'l' en el vocablo 'lila'. Los signos-modelos son clases de signos-aconteci-

mientos. Ejemplo de ellos es: la clase a la cual pertenecen los dos signos 'l' en el vocablo 'lila', es decir, la 'l' que aparece dos veces en el vocablo 'lila'. Los signos de que tratamos en el presente libro son todos signos-modelos; dentro de la esfera de los mismos habrá que recortar los signos específicos de nuestro lenguaje: el lenguaje lógico.

Por lo pronto, partiremos para ello del lenguaje natural ordinario, tal como el empleado en los precedentes pasajes. Este lenguaje puede tener tres alcances: el *cognoscitivo*, el *valorativo* y el *prescriptivo*. Cuando tiene un alcance cognoscitivo, sus oraciones suelen estar en modo indicativo. Cuando tiene un alcance valorativo, sus oraciones suelen estar en modo subjuntivo. Cuando tiene un alcance prescriptivo, sus oraciones suelen estar en modo imperativo. Nos limitaremos aquí al lenguaje con alcance cognoscitivo. Este lenguaje se compone de partículas, algunas de ellas consistentes en una sola secuencia de signos —como las partículas 'oraciones', 'cognoscitivo'—, y otras de ellas consistentes en dos o más secuencias de signos —como las partículas 'el lenguaje', 'este libro', 'se compone de'—. Unas y otras pueden ser distribuidas en dos grupos: las partículas *fácticas* y las partículas *lógicas*. La diferencia entre ellas puede ser ilustrada mediante algunos ejemplos. Consideremos, en efecto, los siguientes enunciados:

Todas las orquídeas son hermosas (1),
Si Ramiro lee este libro con cuidado, entonces lo entenderá bien (2),
La ciencia es distinta de la vida (3).

En (1) hallamos partículas como las orquídeas', hermosas'; en (2), partículas como 'Ramiro', 'lee', 'este libro',

'con cuidado', 'lo entenderá bien'; en (3), partículas como 'la ciencia', 'la vida'. Todas estas partículas son fácticas y pueden ser sustituidas por otras similares sin que se altere la estructura de tales enunciados. Por otro lado, en (1) hallamos partículas como 'todas', 'son'; en (2), partículas como 'si... entonces'; en (3), partículas como 'es distinta de' Todas estas partículas son lógicas y no pueden ser sustituidas por otras sin que se altere la estructura de tales enunciados. Así, podemos escribir:

Todas las palmeras son exóticas (4),
Si Enrique va al cine, entonces pasará un buen rato (5),
El mal es distinto del bien (6).

sin que la mencionada estructura se haya alterado. En cambio, no podemos escribir:

Algunas orquídeas son hermosas (7),
Ramiro lee este libro con cuidado y lo entenderá bien (8),
La ciencia es idéntica a la vida (9),

sin alterar la mencionada estructura. Llamaremos a la estructura compuesta de partículas lógicas *estructura lógica*. Las estructuras lógicas de (1), (2) y (3) son respectivamente:

Todos - - son - - - ,
Si . . . , entonces - - - ,
- . - es distinto de - . - . - ,

que son las mismas estructuras lógicas de (4), (5) y (6), pero no evidentemente las mismas que de (7), (8) y (9). Tales estructuras y las partículas de que se componen son

el objeto primario de nuestra investigación: el lenguaje lógico.

Las estructuras anteriores son, pues, estructuras lógicas; no son, sin embargo, todavía verdades lógicas. Para que una estructura lógica sea verdadera es menester que los enunciados que la exhiben sean verdaderos independientemente de sus partículas fácticas. Consideremos ahora los enunciados siguientes:

Si todos los objetos físicos son espaciales y todos los planetas son objetos físicos, entonces todos los planetas son espaciales (10),
Las doctrinas políticas son utópicas o las doctrinas políticas no son utópicas (11).

Las estructuras lógicas de (10) y (11) son respectivamente:

Si todos - - - son . . . y todos . - . son - - - , entonces todos . - . son . . . (12),
- - son . . . . o - - no son . . . . (13),

que dan verdades lógicas siempre que los espacios punteados y guionados sean llenados en forma apropiada. Así, (12) y (13) pueden ser llenados de las siguientes maneras:

Si todos los hombres son mortales y todos los suecos son hombres, entonces todos los suecos son mortales,
Los manuales de lógica son aburridos o los manuales de lógica no son aburridos,

que son lógicamente enunciados tan verdaderos como

(10) y (11). Pero no pueden ser llenados de las siguientes maneras:

Si todos los hombres son mortales y todos los suecos son aburridos, entonces todos los australianos son perezosos,
Las doctrinas políticas son utópicas o las doctrinas políticas no son interesantes,

pues los resultados no son necesariamente enunciados verdaderos.

Partículas como 'si... entonces', 'y', 'no', 'o', 'es idéntico a', etc., son llamadas *partículas lógicas,* las cuales forman parte del llamado *vocabulario lógico.* Este vocabulario puede ser considerablemente reducido, no sólo porque expresiones distintas en el lenguaje ordinario pueden ser uniformadas en el lenguaje lógico (Cf. § 6), sino también porque algunas partículas lógicas pueden ser definidas en términos de otras (Cf. § 11). Así, 'con tal que' y 'siempre que' pueden ser expresados mediante 'si... entonces', y 'no', 'y', 'o' y otras partículas pueden ser definidas por medio de la sola partícula 'ni... ni'. Ahora bien, la pobreza cuantitativa del vocabulario lógico no confina este vocabulario a un rincón del universo lingüístico. Todo lo contrario; las partículas lógicas están presentes en todos los lenguajes discursivos. Y como los lenguajes de las ciencias son lenguajes discursivos, resulta que el lenguaje lógico es el más universal de los lenguajes y, en cierta medida, la base de todas las ciencias.

§ 2. Lenguaje y metalenguaje

La lógica presentada en este libro no consiste, sin embargo, sólo en exhibir partículas lógicas y verdades lógi-

cas. Pueden asimismo formularse enunciados acerca de tales partículas y de tales verdades. Así,

> 'o' es una conjunción que debe insertarse entre dos fórmulas

constituye un enunciado *sobre* una partícula lógica. A la vez,

> 'Si - - -, entonces - - -' es un condicional verdadero

constituye un enunciado *sobre* una verdad lógica. Ello significa que con los signos del vocabulario lógico puede hacerse lo mismo que con los signos de todos los vocabularios: usarlos o mencionarlos. En el primer caso, los signos son nombres de las entidades que designan; en el segundo caso, los signos son nombres de sí mismos. Unos ejemplos aclararán esta distinción. Si escribimos:

Nicasio es mortal (1),

formulamos un enunciado en el cual se atribuye una propiedad a una entidad: la entidad cuyo nombre es 'Nicasio'. Decimos en tal caso que el signo 'Nicasio' es usado. En cambio, si escribimos:

'Nicasio' es un vocablo trisilábico (2),

formulamos un enunciado en el cual se atribuye una propiedad a un nombre: el nombre 'Nicasio'. Decimos en tal caso que el signo 'Nicasio' es mencionado. Para subrayar la distinción se ha adoptado, y se seguirá adoptando en

lo sucesivo, la convención según la cual se escribe un signo mencionado entre semicomillas. No podíamos, en efecto, escribir:

Nicasio es un vocablo trisilábico,

pues lo que aquí hacemos en verdad es hablar del nombre 'Nicasio' y no de la entidad cuyo nombre es 'Nicasio'. La entidad en cuestión no tiene tres sílabas, pero su nombre sí las tiene. De hecho, (1) y (2) hubieran debido colocarse todos entre semicomillas, pues en ambos casos hemos mencionado dichos enunciados, pero es usual adoptar el expediente de suprimir las semicomillas cuando la expresión mencionada es escrita en una línea separada del texto.

La distinción entre uso y mención es fundamental. Fue ya barruntada por algunos escolásticos en la llamada *teoría de las suposiciones*. Entre éstas había, en efecto, dos que nos interesan aquí particularmente: la llamada *suposición formal (suppositio formalis)* y la llamada *suposición material (suppositio materialis)*. Se decía que una expresión estaba en *suppositio formalis* cuando se refería a la entidad, tal como en:

Homo currit.

Se decía que una expresión estaba en *suppositio materialis* cuando se refería al nombre de la entidad, tal como en:

Homo est disyllabus (3).

De hecho, (3) hubiera debido escribirse, según nuestra convención:

'Homo' est disyllabus.

Los escolásticos, sin embargo, aunque conocedores de la distinción entre el uso y la mención, no adoptaron ningún expediente en la escritura de los signos, se fiaban del contexto para descifrar en qué *suppositio* eran tomados cada una de las partículas o de los enunciados.

En nuestra actual terminología, la distinción entre uso y mención está basada en la llamada *teoría de la jerarquía de lenguajes* que analizaremos en § 40. Consiste esta teoría en distinguir entre un lenguaje, usualmente llamado *objeto lenguaje*,* y el lenguaje de este lenguaje, usualmente llamado *metalenguaje*. El metalenguaje es el lenguaje en el cual hablamos acerca del objeto-lenguaje. Para hablar de un lenguaje necesitamos, en efecto, siempre otro lenguaje. Si escribimos:

'Los cuerpos son pesados' es verdadero,

tenemos una expresión en la cual 'es verdadero' es afirmado de 'Los cuerpos son pesados'. 'Es verdadero' pertenece, pues, a un metalenguaje: el metalenguaje del objeto-lenguaje de la física en el cual se enuncia que todos los cuerpos son pesados. El objeto-lenguaje es siempre un lenguaje inferior al metalenguaje. Sin embargo, 'inferior' no debe entenderse aquí en un sentido valorativo; designa simplemente el lenguaje del cual se habla y especifica su posición en el universo del discurso. El objeto-lenguaje lo es, en efecto, sólo con relación al metalenguaje, y éste sólo con relación a aquél. Por otro lado, un metalenguaje

* Una expresión española más correcta sería quizás 'lenguaje-objeto'. Sin embargo, 'objeto-lenguaje' ofrece un paralelismo lingüístico con 'metalenguaje' que conviene conservar.

se llama *inferior* con respecto a otro metalenguaje en que se habla de él. Así, el metalenguaje al cual pertenece el enunciado:

'Sauce' es una voz en el idioma español

es inferior al metalenguaje al cual pertenece el enunciado:

"'Sauce' es una voz en el idioma español' es verdadero.

La serie de metalenguajes es, por lo tanto, infinita. Con el fin de evitar la reduplicación de 'meta' antepuesto a 'lenguaje' —metalenguaje, meta-metalenguaje, etc.— suele usarse el índice 'L'. Así, dado un lenguaje cualquiera, L_n, L_{n+1} indica su metalenguaje, L_{n+2} el metalenguaje de ese metalenguaje, y así sucesivamente.

§ 3. Semiótica

De lo anterior se desprende que lo que hemos llamado *lógica* puede entenderse en dos sentidos:

(a) Como el sistema de signos lógicos, el cual, según antes apuntamos, está en la base de todo discurso;

(b) Como la serie de metalenguajes en los cuales es posible hablar acerca de dichos signos lógicos.

Llamaremos a (b) *metalógica*. La lógica que se expone habitualmente en los tratados de esta ciencia se compone por igual de (a) y de (b) y, por lo tanto, es imposible separar completamente la lógica de la metalógica en la presentación de esta disciplina. Esta imposibilidad se hará patente en los capítulos que siguen del presente libro; aunque la metalógica es objeto de un capítulo especial, enunciados metalógicos serán frecuentes en los capítulos que desarrollan las diversas partes de la lógica.

La metalógica es una parte de la llamada *semiótica* o estudio general de los signos. La semiótica puede ser considerada como un metalenguaje. Ahora bien, los metalenguajes tienen tres dimensiones, cada una de las cuales da origen a una diferente rama del estudio semiótico: la *sintaxis*, la *semántica* y la *pragmática*.

La sintaxis estudia los signos como puras y simples figuras, independientemente de lo que designan y significan. Se define asimismo como el estudio de las relaciones de los signos entre sí. Por lo tanto, la sintaxis es la teoría de la construcción o formación de todo lenguaje. Cuando los lenguajes estudiados son los lenguajes lógicos, la sintaxis es llamada a veces *sintaxis lógica*. Un ejemplo de enunciados pertenecientes a la sintaxis lógica es: "'Si los cuerpos son menos pesados que el agua, entonces flotan en el agua' es un condicional". La sintaxis lógica puede ser a su vez sintaxis no-aritmética y sintaxis aritmética. Referencia a esta última se hallará en § 43.

La semántica estudia los signos en su relación con los objetos designados. La semántica opera, pues, en un nivel menos abstracto y formal que la sintaxis. Como una de las relaciones entre los signos y los objetos designados es la relación de verdad, la noción de verdad cae dentro de la semántica. Así, un enunciado perteneciente a la semántica es: "'Si los cuerpos son menos pesados que el agua, entonces flotan en el agua' es un enunciado verdadero".

La pragmática estudia los signos en su relación con los sujetos que los usan. Como en este respecto se dice que los signos significan algo para alguien, la pragmática se ocupa de las significaciones. La pragmática opera, pues, en un nivel menos abstracto y formal que la sintaxis y la semántica. Un ejemplo de enunciados pertenecientes a

la pragmática es: ''Los hombres son naturalmente afectuosos' es considerado como poco plausible'.

Como nos ocuparemos más circunstancialmente de la sintaxis, la semántica y la pragmática en el capítulo VIII, las esquemáticas definiciones anteriores serán consideradas provisionalmente como suficientes. Concluiremos indicando que, considerada como una serie de metalenguajes, la metalógica poseerá las tres dimensiones: la sintáctica, la semántica y la pragmática. Como oportunamente veremos, la primera dimensión ha sido estudiada con notable detalle y rigor; la segunda, con bastante amplitud; la tercera, con escasa profundidad.

§ 4. Lógica deductiva y lógica inductiva

La lógica que presentaremos y la metalógica en la cual hablaremos de ella han sido llamadas con frecuencia *lógica deductiva*. Junto a ella se ha solido presentar otra lógica, calificada de *lógica inductiva*. Ambos calificativos son poco afortunados. En efecto, la forma deductiva es propia no sólo de la lógica y la metalógica que aquí presentaremos, sino también de la lógica inductiva, que excluiremos. Por otra parte, esta última lógica se ocupa de otros temas además del de la inducción. En vista de ello podría pensarse que mientras la lógica deductiva tiene, por decirlo en el vocabulario tradicional, un carácter "formal", la lógica inductiva posee un carácter "material". Pero tampoco estos calificativos son apropiados; aunque con frecuencia menos acentuado que en la lógica deductiva, el formalismo está presente asimismo en la lógica inductiva. No entraremos aquí en detalles sobre este problema. Nos limitaremos a señalar que en el estado actual de la lógica inductiva lo más plausible es considerarla

como una lógica probabilitaria, de tal modo que todo razonamiento inductivo será un razonamiento en términos de probabilidad. Sin embargo, los principios y teoremas de la lógica inductiva no son de naturaleza sintética, sino analítica, no dependiendo, por lo tanto, de presuposiciones sintéticas tales como las de la regularidad y uniformidad de los fenómenos, que habían constituido uno de los ejes principales de la logica inductiva en el pasado.

Aunque elaborada en muy diversas ocasiones, a veces con gran habilidad y detalle, la lógica inductiva no ha entrado sino recientemente, como diría Kant, en el seguro camino de la ciencia. La contribución de Carnap a ella debe ser considerada como fundamental; no sería sorprendente que la obra aún no terminada de dicho autor sobre la probabilidad y la inducción (Cf. Apéndice: Bibliografía) desempeñara en la lógica inductiva el mismo papel revolucionario que la obra de Gottlob Frege (Cf. *ibidem*) desempeñó en la lógica deductiva. Por desgracia, no podemos extendernos aquí sobre este punto; nos urge ya presentar el sistema de lógica y de metalógica que constituye la principal tarea de este volumen.

§ 5. El formalismo en la lógica

El carácter formal de la lógica se revela en el hecho de que esta disciplina se ocupa únicamente de estructuras formales en el sentido definido en § 1, y de las relaciones entre tales estructuras. Una de estas relaciones es, por ejemplo, la deducibilidad.

Sin embargo, una lógica puede ser formal sin ser todavía formalizada. Una lógica se halla formalizada cuando se enumeran en ella todos los signos no definidos; se especifica en qué condiciones una fórmula dada pertenece

al sistema; se enumeran los axiomas usados como premisas y las reglas de inferencia consideradas como aceptables, etc.

Así, por ejemplo, la lógica tal como es presentada en los textos de Aristóteles es una lógica formal, pero no ha sido formalizada por el Estagirita. No obstante, esta lógica puede ser formalizada, tal como lo ha hecho J. Lukassiewicz en su obra sobre la silogística aristotélica.

Debe advertirse que los términos 'formal' y 'formalizado' no deben confundirse con el vocablo 'formalista' que se emplea para designar una de las tres grandes escuelas en la matemática contemporánea, junto a las escuelas logicista e intuicionista. No nos extenderemos sobre este punto, que no entra en nuestro programa; indicaremos simplemente que la formalización se aplica a la escuela formalista tanto como a las escuelas logicista e intuicionista.

II. LÓGICA SENTENCIAL

§ 6. Juicio, proposición y sentencia*

La lógica llamada *clásica* o *tradicional* (la de inspiración aristotélico-escolástica) distingue entre el *juicio* y la *proposición*. El juicio es el acto mental por medio del cual pensamos cualesquiera enunciados, tales como:

$5 + 7 = 12$ (1),
Pérez es un buen jugador de pelota (2),
Juan corre (3).

* El lector excusará el sentido —muy distinto del habitual— en que se usa aquí 'sentencia', así como las voces 'sentencial' y 'sentencialmente'. Ello obedece a dos motivos. Primero, a que los términos españoles que resultarían más adecuados —'oración', 'oracional', 'oracionalmente'— tienen, para nuestro propósito, un sentido demasiado gramatical. Segundo, a que en algunos casos 'oracional' resultaría literariamente torpe; por ejemplo, en 'lógica oracional', 'letra oracional'. Mejor es, pues, usar una terminología nueva, basada en una previa convención. (El profesor José Gaos, que leyó el manuscrito de la primera edición de esta obra con su habitual cuidado y perspicacia y que hizo sobre el mismo varias observaciones valiosas, propuso sustituir los términos 'sentencia', 'sentencial' y 'sentencialmente' por los términos 'enunciado', 'enunciativo' y 'enunciativamente'. La proposición era tentadora; los vocablos propuestos se ajustaban más al genio del lenguaje español y permitían suprimir de golpe tres patentes anglicismos. Sin embargo, después de considerar el punto detenidamente, hemos decidido no seguir dicha propuesta: 1) porque 'enunciado' está demasiado próximo a 'expresión de una idea'; 2) porque la expresión 'lógica enunciativa' se libraba difícilmente de su traducción a la expresión 'lógica que enuncia'. A pesar de los inconvenientes que acarrea el uso de los términos 'sentencia', 'sentencial' y 'sentencialmente', seguimos considerando que prestan buen servicio. Observemos que cada vez que empleemos 'enunciado' lo haremos como equivalente a 'sentencia'.)

La proposición, en cambio, es lo pensado en dicho acto. La lógica moderna (la que sigue la línea inspirada por Frege) ha preferido prescindir de los juicios y atenerse a las proposiciones. Pero como aun las proposiciones han mostrado ser de difícil manejo, se ha tendido cada vez más en la lógica a confinarse a las *sentencias*. Por éstas se entienden series de signos en los cuales se expresan proposiciones. En el presente volumen seguiremos el uso hoy día más extendido y nos las habremos con sentencias. (1), (2) y (3) serán considerados como sentencias, y la lógica que trata de las sentencias como unidades y de sus combinaciones será llamada *lógica sentencial*.

Las sentencias son simbolizadas mediante letras, llamadas *letras sentenciales*. Adoptaremos a este efecto las letras '*p*', '*q*', '*r*', '*s*' y, en caso necesario, las mismas letras seguidas de acentos: '*p*'', '*q*'', '*r*'', '*s*'', '*p*''', '*q*''', '*r*''', '*s*''', y así sucesivamente. Cada letra sentencial representa un enunciado declarativo;* a su vez, los enunciados declarativos son considerados como *ejemplos* de letras sentenciales. Así, (1), (2) y (3) son ejemplos de cualesquiera de las letras sentenciales.

Los enunciados representados por las letras sentenciales pueden ser de dos tipos: *atómicos* y *moleculares*. Los enunciados atómicos son enunciados como:

Antonio es un buen estudiante,

o:

La madre de Antonio es feliz,

los cuales no incluyen conjunciones. Los enunciados mo-

* Por 'enunciado declarativo' entendemos un enunciado expresado en modo indicativo. Dejaremos por ello de lado en este libro enunciados en modos subjuntivo e imperativo, para los cuales hay que desarrollar otras lógicas, todavía en formación.

leculares se obtienen combinando enunciados atómicos mediante conjunciones. Así.

Si Antonio es un buen estudiante, entonces la madre de Antonio es feliz (4)

es un enunciado molecular. La conjunción empleada en (4) es 'si . . . entonces'. (4) puede ser formulado en lenguaje ordinario de manera más idiomática, tal como:

Cuando Antonio es un buen estudiante, su madre es feliz (5).

Sin embargo, en lógica se prefieren formas de expresión uniformes, con el fin de evitar ambigüedades e imprecisiones. Por ello, cuando se ejecutan razonamientos que envuelven sentencias es necesario antes uniformar el lenguaje. Desde este punto de vista, enunciados como:

Si Pedro viene, jugaremos al billar (6),
De venir Pedro, jugaremos al billar (7),
Jugaremos al billar, con tal que Pedro venga (8)

son considerados lógicamente equivalentes a:

Si Pedro viene, entonces jugaremos al billar (9).

Lo que sucede con la conjunción 'si . . . entonces', ocurre con todas las otras conjunciones; el lenguaje ordinario ofrece muchas variantes de las formulaciones lógicas.

Cuando se combinan letras sentenciales y conjunciones, se obtienen *esquemas sentenciales*. Así,

Si p, entonces q (10)

es un esquema sentencial. Los ejemplos de los esquemas sentenciales son enunciados moleculares. Así, (4), (5), (6), (7), (8) y (9) son ejemplos de (10).

§ 7. Conectivas

Los enunciados moleculares:

Si Jaime sigue fumando, entonces pescará un catarro,
Si la ley de la gravitación es falsa, entonces Newton se equivocó,

tienen algo de común. Es la conjunción:

Si - - - entonces . . . ,

que llamaremos ahora una *conectiva.** Hay varias conectivas; unas se refieren a una sola fórmula *(conectivas singulares)*; otras, a dos *(conectivas binarias)*. La lógica sentencial estudia sobre todo seis conectivas: 'no', 'y', 'o', 'o . . . o', 'si . . . entonces' y 'si y sólo si'.

La conectiva 'no' o *negación* es la única conectiva singular de las mentadas. Es simbolizada por el signo '—' prefijado a la letra sentencial o al enunciado. Así,

$$-p$$

se lee 'no p'. Ejemplo del mencionado esquema sentencial es:

No (Nehru es francés) (1),

* 'Conectiva' designa 'partícula conectiva'. Usamos el adjetivo sustantivado.

o bien:

No es el caso que Nehru sea francés (2).

Se observará que mientras en el lenguaje lógico 'no' antecede al enunciado, en el lenguaje ordinario (en español) sigue al sujeto. Una expresión más idiomática de (1) y (2) es:

Nehru no es francés.

La conectiva 'y' o *conjunción* es simbolizada por el signo '·' insertado entre dos fórmulas. Así,

$$p \cdot q$$

se lee 'p y q'. Ejemplo de este esquema es:

Antonio es mentiroso y Juan es mentiroso,

que se formula de modo más idiomático escribiendo:

Antonio y Juan son mentirosos.

La conectiva 'o' o *disyunción* tiene dos sentidos, y a ellos se alude ya en el lenguaje ordinario cuando se distingue entre 'o' y 'o ... o'. Cada uno de dichos sentidos es expresado en la lógica sentencial mediante un signo propio. La conectiva 'o' corresponde a la llamada disyunción *inclusiva* y es simbolizada por el signo '$\vee$' insertado entre dos fórmulas. Así,

$$p \vee q$$

se lee 'p o q'. La conectiva 'o ... o' corresponde a la lla-

mada disyunción *exclusiva* y es simbolizada por el signo '$\not\equiv$' insertado entre dos fórmulas. Así,

$$p \not\equiv q$$

se lee 'o p o q'. Como en el lenguaje ordinario 'p o q' puede ser también empleado en el sentido de 'o p o q', se ha extendido la costumbre de usar 'p o q (o ambos)' en lugar de 'p o q' inclusiva, y de usar 'p o q (pero no ambos)' en lugar de 'p o q' exclusiva o en lugar de 'o p o q'.

Así,

Antonio se dedica a la natación o al alpinismo,

puede entenderse de las dos siguientes maneras:

Antonio se dedica a la natación o al alpinismo (o a ambos) (3),
Antonio se dedica a la natación o al alpinismo (pero no a ambos) (4).

(3) es un ejemplo de disyunción inclusiva; (4), de disyunción exclusiva.

La conectiva 'si ... entonces' o *condicional* es simbolizada por el signo '$\supset$' insertado entre dos fórmulas, la primera de las cuales es llamada *antecedente* y la segunda *consecuente*. Así,

$$p \supset q$$

se lee 'si p, entonces q'. De este esquema sentencial hemos dado varios ejemplos en § 6. Debe advertirse que la conectiva '$\supset$' no debe confundirse con la llamada *implicación*. Nos referimos a esta diferencia al exponer, en § 8, las tablas de verdad. En el mismo lugar tratamos del llamado sentido material de '$\supset$'.

La conectiva 'si y sólo si' o *bicondicional* es simbolizada por el signo '$\equiv$' insertado entre dos fórmulas. Así,

$$p \equiv q$$

se lee 'p si y sólo si q'. Ejemplo de este esquema es:

Madrid está al Norte de Sevilla si y sólo si Sevilla está al Sur de Madrid.

'$\equiv$' se llama *bicondicional*, porque, como lo veremos en § 9.

$$p \equiv q$$

puede leerse:

$$(p \supset q) \,.\, (q \supset p).$$

En el párrafo anterior hemos usado los paréntesis '(' y ')'. Estos dos símbolos forman parte de la lógica sentencial, aunque conviene recordar que su uso en ella es lógico y no retórico. Sin los paréntesis, las fórmulas podrían ser ambiguas o hasta carecer de sentido. Suponiendo ahora que el lector conoce bien los significados de '$-$' '$.$', '$\vee$', '$\not\equiv$', '$\supset$' y '$\equiv$', daremos dos ejemplos para mostrar la necesidad de '(' y ')'.

La expresión:

$$-p \vee q,$$

sin paréntesis, se lee:

No p o q.

Pero si lo que queremos afirmar es:

No es el caso que p o q,

deberemos escribir:

$$\neg(p \vee q).$$

La expresión:

$$p \supset q \supset r$$

carece de significación, y el lector es invitado a hacer una lectura lógica de la misma. En cambio, las expresiones:

$$p \supset (q \supset r) \qquad (5),$$
$$(p \supset q) \supset r \qquad (6)$$

tienen significación, aunque (5) es distinto de (6). La diferente lectura lógica depende precisamente de la diferente colocación de '(' y ')'.

No siempre, sin embargo, son usados los paréntesis; puede prescindirse de ellos cuando las expresiones lógicas son por sí mismas suficientemente claras. En general, *no* se emplean los paréntesis en torno a una sola letra sentencial o en torno a una expresión lógica que no forma parte de otra expresión lógica. Así ha ocurrido ya en (5) y (6), que sin las excepciones anteriores hubiéramos tenido que escribir respectivamente:

$$((p) \supset ((q) \supset (r))),$$
$$(((p) \supset (q)) \supset (r)).$$

§ 8. Tablas de verdad

Hasta ahora nos hemos referido a letras sentenciales y a esquemas sentenciales sin tener en cuenta si eran verdaderos o falsos. Ahora bien, un primer principio que cabe sentar es éste:

P1: Todo enunciado es o verdadero o falso.

Este principio significa que a todo enunciado puede asignarse uno de los dos siguientes predicados: 'es verdadero' o 'es falso'. Estos predicados son de índole metalógica. Aquí los simbolizamos respectivamente mediante las letras 'V' y 'F', llamadas *valores de verdad.*

A dicho principio haremos seguir otro:

P2: Los valores de verdad de cualquiera fórmula molecular (esquema sentencial o enunciado molecular) están determinados por los valores de verdad de las fórmulas componentes.

Con ayuda de estos dos principios se pueden formar las llamadas *tablas de verdad.* Mediante ellas se determina de un modo mecánico la verdad o la falsedad de una fórmula molecular cualquiera dados los valores de verdad de las fórmulas componentes. En la presente sección construiremos tablas sólo para esquemas sentenciales. El lector podrá construirlas fácilmente para enunciados moleculares.

Comenzaremos por las tablas de verdad correspondientes a las seis conectivas estudiadas en § 7. Para comprender la formación de dichas tablas, procederemos a construir dos figuras: una, que se refiere a las posibilidades de verdad y falsedad para una sola letra sentencial; otra, que se refiere a las posibilidades de verdad y falsedad para dos letras sentenciales.

La figura para una sola letra sentencial es:

p
V
F

la cual indica que dada una letra sentencial hay para

ella dos posibilidades: una, que sea verdadera; otra, que sea falsa.

La figura para dos letras sentenciales es:

p	q
V	V
F	V
V	F
F	F

la cual indica que dadas dos letras sentenciales hay para ellas cuatro posibilidades:

1. Ambas son verdaderas;
2. La primera es falsa y la segunda es verdadera;
3. La primera es verdadera y la segunda es falsa;
4. Ambas son falsas.

A base de estas dos figuras construiremos las tablas de verdad para las seis conectivas antes presentadas. La columna o dos columnas de la izquierda son llamadas *columna* o *columnas de referencia;* contienen, en orden de aparición, las letras de que se compone la fórmula cuyos valores se trata de averiguar, y bajo estas letras todas sus posibilidades de verdad y de falsedad. La columna de la derecha contiene los valores de verdad de la fórmula dada.

La tabla de verdad para '$-p$' es:

p	$-p$
V	F
F	V

la cual indica que cuando una fórmula es verdadera su negación es falsa, y que cuando una fórmula es falsa su negación es verdadera.

La tabla de verdad para '$p \cdot q$' es:

p	q	$p \cdot q$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	F

la cual indica que cuando 'p' es verdadera y 'q' es verdadera, la conjunción de 'p' y 'q' es verdadera; que cuando 'p' es falsa y 'q' es verdadera, la conjunción de 'p' y 'q' es falsa; que cuando 'p' es verdadera y 'q' es falsa, la conjunción de 'p' y 'q' es falsa; y que cuando 'p' es falsa y 'q' es falsa, la conjunción de 'p' y 'q' es falsa.

La tabla de verdad para '$p \vee q$' es:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
F	V	V
V	F	V
F	F	F

Su explicación, por seguir el modelo de la precedente, la consideramos innecesaria.

La tabla de verdad para '$p \not\equiv q$' es:

p	q	$p \not\equiv q$
V	V	F
F	V	V

V	F	V
F	F	F

La tabla de verdad para '$p \supset q$' es:

p	q	$p \supset q$
V	V	V
F	V	V
V	F	F
F	F	V

La tabla de verdad para '$p \equiv q$' es:

p	q	$p \equiv q$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	V

Si el lector ha seguido con atención estas tablas y ha procurado llenarlas con los ejemplos pertinentes, habrá observado algo sorprendente especialmente en la tabla de verdad correspondiente a '$p \supset q$'. La línea tercera de la misma contiene la correlación:

p	q	$p \supset q$
V	F	F

que está de acuerdo con el uso habitual del condicional; en efecto, el enunciado molecular:

Si Goethe era un escritor, Napoleón era un químico (1),

es considerado como falso, y nadie negará que todo condicional que tenga una estructura formal análoga a (1) es falso. En cambio, las líneas primera, segunda y cuarta:

p	q	$p \supset q$
V	V	V
F	V	V
F	F	V

parecen ofrecer algunas dificultades. Si consideramos los siguientes enunciados moleculares:

Si Saturno es un planeta, París es la Capital de Francia,
Si Valparaíso es un puerto del Atlántico, Venus es un planeta,
Si los peces ladran, Caracas fué fundada por Tiglatt Pileser III,

y consultamos la tabla de verdad para '$p \supset q$' tendremos que declararlos todos verdaderos. Esto significa que *cualquiera que sea la relación conceptual* que ligue a un consecuente con un antecedente, un condicional será siempre verdadero excepto cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso. Esta interpretación del condicional es llamada *interpretación material*. Fue conocida ya por Filón de Megara (siglo IV a. de c.) y ampliamente utilizada por los estoicos y por algunos lógicos medievales. Luego cayó en el olvido y sólo comenzó a ser de

nuevo utilizada por G. Frege (1879) y Ch. S. Peirce (1885). Fué muy debatida por los lógicos ya en la antigüedad; su rechazo en nuestro siglo por C. I. Lewis en favor de la llamada *interpretación estricta* ha dado lugar al cálculo de implicación estricta al cual nos referimos en § 13. Lewis y algunos otros lógicos consideran la tabla para '⊃' como una fuente de paradojas; dicha tabla, pretenden, afirma que un enunciado falso "implica" cualquier enunciado, o que un enunciado verdadero es "implicado" por cualquier enunciado. Ello, sin embargo, es incorrecto, pues, como apuntamos en § 7, hay diferencia entre el condicional y la implicación. Todas las llamadas "paradojas de la implicación material" obedecen, en efecto, a considerar el condicional como si fuera una implicación, es decir, a leer '⊃' como 'implica' en vez de leerlo como una abreviatura de 'si ... entonces'. Los motivos de la confusión radican en el descuido de la diferencia entre uso y mención explicada en § 2. En efecto, mientras en un condicional tal como:

Si Saturno es un planeta, París es la capital de Francia (2)

se usan enunciados, en una implicación tal como:

'Saturno es un planeta' implica 'París es la capital de Francia' (3)

se usan nombres de enunciados.

(2) es un condicional verdadero; (3) es una implicación falsa. Observamos que cuando un condicional es *lógicamente* verdadero puede decirse que el antecedente (entre semicomillas) implica el consecuente (entre semicomillas). Tal sería el caso de:

Si Saturno es un planeta y París es la capital de Francia, entonces París es la capital de Francia.

Como este condicional es lógicamente verdadero, puede concluirse que su antecedente (entre semicomillas) implica su consecuente (entre semicomillas); por lo tanto:

'Saturno es un planeta y París es la capital de Francia' implica 'París es la capital de Francia'.

Pero (2), aunque verdadero, no es lógicamente verdadero. No puede decirse, pues, que su antecedente implica su consecuente. De ahí que (3), como hemos indicado, sea falso.

En el presente volumen leeremos siempre '$p \supset q$' como 'si ... entonces', salvo, por supuesto, cuando el condicional en cuestión es lógicamente verdadero. Además, mientras no se indique lo contrario, interpretaremos '$\supset$' en sentido material.

Consideraciones parecidas a las hechas sobre el condicional podríamos haber sentado para otras conectivas. Es el caso del bicondicional. Ciertos lógicos, por ejemplo, tienen la tendencia a leer '$p \equiv q$' como '"p' es equivalente a 'q"'. Ahora bien, aquí aceptaremos esta lectura sólo cuando el bicondicional en cuestión sea lógicamente verdadero. En todos los demás casos, leeremos '$p \equiv q$' como 'p si y sólo si q'.

Las tablas de verdad no se confinan, por supuesto, a las anteriormente presentadas; según hemos apuntado, se construyen tablas para comprobar mecánicamente el valor de verdad de *cualquier* fórmula molecular dados los valores de verdad de las fórmulas componentes. Muy en particular se usan las tablas, como veremos en § 9, para identificar las fórmulas llamadas *tautologías*. El procedi-

miento utilizado para construir tablas es muy simple; consiste en indicar todos los valores de verdad posibles para las fórmulas que componen la fórmula molecular dada y en ir derivando mecánicamente los valores de verdad para el compuesto.

Daremos a continuación ejemplos de construcción de tablas para fórmulas de dos y tres letras.

Si queremos comprobar los valores de verdad para '$p \,.\, {-}q$', construiremos la tabla siguiente:

p	q	$-q$	$p \,.\, -q$
V	V	F	F
F	V	F	F
V	F	V	V
F	F	V	F

Siguiendo el método propuesto, se han escrito a la izquierda las columnas de referencia para 'p' y 'q'; se han computado luego los valores de verdad para '$-q$' consultando la tabla de '$-$' y columna de referencia de 'q', y se han computado finalmente los valores de verdad de la conjunción de 'p' y '$-q$' consultando la tabla de verdad de '$.$', la columna de referencia de 'p' y la columna de valores de '$-q$'.

Los valores de verdad para '$-((p \,.\, q) \supset p)$' son dados en la siguiente tabla:

p	q	$p \,.\, q$	$(p \,.\, q) \supset p$	$-((p \,.\, q) \supset p)$
V	V	V	V	F
F	V	F	V	F
V	F	F	V	F
F	F	F	V	F

para la construcción de la cual se han seguido los mismos métodos de consulta y computación.

Hasta ahora hemos utilizado solamente fórmulas de una y dos letras sentenciales. Lo hemos hecho para facilitar la comprensión de la construcción de las tablas. Pero pueden tomarse fórmulas compuestas de un número cualquiera de letras. Al aumentar las posibles combinaciones de valores de verdad, las tablas se hacen más complicadas. He aquí, como ejemplo, las columnas de referencia para tres letras sentenciales.

p	q	r
V	V	V
F	V	V
V	F	V
F	F	V
V	V	F
F	V	F
V	F	F
F	F	F

La construcción de tablas para fórmulas de tres letras se efectúa según los mismos procedimientos adoptados para fórmulas de dos letras. He aquí un ejemplo: la tabla de verdad para $((p \supset q) \ (q \supset r)) \supset (p \supset r)$:

p	q	r	$p \supset q$	$q \supset r$	$(p \supset q) . (q \supset r)$
V	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	F
F	F	V	V	V	V

V	V	F	V	F	F
F	V	F	V	F	F
V	F	F	F	V	F
F	F	F	V	V	V

$p \supset r$	$((p \supset q).(q \supset r)) \supset (p \supset r)$
V	V
V	V
V	V
V	V
F	V
V	V
F	V
V	V

Dejamos al lector la construcción de tablas de verdad para fórmulas de más de tres letras.

Las tablas de verdad de que hasta ahora hemos hablado se refieren a la lógica sentencial bivalente, en la cual se adoptan sólo dos valores de verdad. Algunas tablas de verdad para lógicas no bivalentes serán presentadas en § 12.

§ 9. Tautologías. Leyes de la lógica sentencial

Al verificar en la sección anterior los valores de verdad de algunas fórmulas moleculares nos hemos topado con tres casos:

1. La tabla de verdad de la fórmula contenía uves *y* efes. Fue el caso de '$p \,.\, -q$'.

2. La tabla de verdad de la fórmula contenía *sólo* uves. Fue el caso de '$((p \supset q).(q \supset r)) \supset (p \supset r)$'.

3. La tabla de verdad de la fórmula contenía *sólo* efes. Fue el caso de '$-((p \,.\, q) \supset p)$'.

Llamamos a las fórmulas del primer tipo *indeterminadas;* a las del segundo, *tautologías* o fórmulas sentencialmente válidas; a las del tercero, *contradicciones* o fórmulas sentencialmente contra-válidas. El objeto de esta sección son las fórmulas del segundo tipo, es decir, las tautologías.

Señalamos en § 8 que las tablas de verdad sirven para identificar tautologías; '$((p \supset q) \,.\, (q \supset r)) \supset (p \supset r)$', por ejemplo, apareció como una tautología, porque todos sus valores de verdad resultaron ser uves. Conviene ejecutar la misma operación identificadora para algunas fórmulas singulamente importantes en la lógica sentencial.

Comenzaremos por ciertas fórmulas bien conocidas en lógica.

1. Las fórmulas conocidas en la lógica tradicional con el nombre de *principios de identidad:* '$p \supset p$' y '$p \equiv p$'.

2. La fórmula conocida en la lógica tradicional con el nombre de *principio de contradicción:* '$-(p. -p)$.'

3. La fórmula conocida en la lógica tradicional con el nombre de *principio del tercio excluso:* '$p \vee -p$'.

Pueden construirse para ellas las tablas de verdad correspondientes, con el fin de ver si son incondicionalmente válidas, es decir, si merecen el nombre de tautologías. El resultado es afirmativo; he aquí, en efecto, sus tablas:

p	$p \supset p$	$p \equiv p$	$-(p \,.\, -p)$	$p \vee -p$
V	V	V	V	V
F	V	V	V	V

Ahora bien, el número de tautologías no se reduce a las mencionadas hasta aquí. Hay un número infinito de

tautologías. Así por ejemplo, '$p \supset (p \vee q)$' es una tautología, como lo muestra la tabla:

p	q	$p \vee q$	$p \supset (p \vee q)$
V	V	V	V
F	V	V	V
V	F	V	V
F	F	F	V

Las tautologías no son, como podría pensarse, un inútil objeto de lujo en la lógica. En § 10 serán usadas para las pruebas en la lógica sentencial; las tautologías desempeñan, pues, un papel fundamental en los procesos de la deducción dentro de esta lógica. Ahora bien, del infinito número de tautologías posibles hay algunas que son especialmente útiles para tal propósito. Procedemos a continuación a enumerarlas. Siguiendo la norma hoy habitual en los tratados lógicos, las agrupamos por afinidad y les damos el nombre de *leyes*. Algunas de estas leyes serán reconocidas por el lector familiarizado con la lógica clásica. Para no extendernos demasiado, y por ser de fácil hallazgo, nos abstendremos de dar ejemplos. La letra "T" que precede a cada uno de los números es una abreviatura de 'Tautología'.

T1a : $p \supset p$,

T1b : $p \equiv p$,

T2 : $-(p \,.\, -p)$,

T3 : $p \vee -p$

son las *leyes de identidad* (T1a, T1b), de contradicción (T2) y *de tercio excluso* (T3) ya mencionadas.

T4 : $p \equiv - - p$

es la *ley de doble negación*, según la cual pueden eliminarse las dobles negaciones.

T5a : $(p \,.\, q) \supset p$,

T5b : $p \supset (p \vee q)$

son *leyes de simplificación.* La primera indica que una conjunción implica cualquiera de sus miembros componentes; la segunda, que una disyunción está implicada por cualquiera de sus miembros componentes.

T6a : $(p \,.\, q) \equiv (q \,.\, p)$,

T6b : $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$,

T6c : $(p \equiv q) \equiv (q \equiv p)$

son *leyes de conmutación;* indican que pueden conmutarse los miembros de conjunciones, disyunciones y bicondicionales.

T7a : $((p \,.\, q) \,.\, r) \equiv (p \,.\, (q \,.\, r))$,

T7b : $((p \vee q) \vee r) \equiv (p \vee (q \vee r))$,

T7c : $((p \equiv q) \equiv r) \equiv (p \equiv (q \equiv r))$

son *leyes de asociación;* indican que pueden agruparse como se quiera los miembros de conjunciones, disyunciones y condicionales.

T8a : $(p \,.\, (q \vee r)) \equiv ((p \,.\, q) \vee (p \,.\, r))$,

T8b : $(p \vee (q \,.\, r)) \equiv ((p \vee q) \,.\, (p \vee r))$,

T8c : $(p \supset (q \,.\, r)) \equiv ((p \supset q) \,.\, (p \supset r))$,

T8d : $(p \supset (q \vee r)) \equiv ((p \supset q) \vee (p \supset r))$

son *leyes de distribución;* indican que una conjunción puede distribuirse en una disyunción (T8a); que una disyunción puede distribuirse en una conjunción (T8b); y que un condicional puede distribuirse ya en una conjunción, ya en una disyunción (T8c, T8d).

T9a : $((p \supset q) \,.\, (q \supset r)) \supset (p \supset r)$,

T9b : $((p \equiv q) \,.\, (q \equiv r)) \supset (p \equiv r)$

son *leyes de transitividad;* constituyen la expresión simbólica de lo que la lógica clásica llama *silogismos hipotéticos.*

T10 : $(((p \supset q) \,.\, (r \supset s)) \,.\, (p \vee r)) \supset (q \vee s)$

es la *ley del dilema,* muy usada en la antigua retórica y todavía muy común en las discusiones para poner al adversario en un aprieto.

T11 : $((p \,.\, q) \supset r) \equiv (p \supset (q \supset r))$

es una *ley de exportación;* indica que una parte del antecedente de un condicional puede pasar al consecuente mediante un cambio de conectiva.

T12a : $(p \supset q) \equiv (-q \supset -p)$,

T12b : $(p \equiv q) \equiv (-q \equiv -p)$

son *leyes de transposición;* indican que los miembros de un condicional y de un bicondicional pueden ser transpuestos si se les hace preceder de la negación.

T13 : $(p \equiv q) \equiv ((p \supset q) \,.\, (q \supset p))$

es llamada *bicondicional;* indica que un bicondicional puede transformase en un par de condicionales. Hemos usado esta ley en § 7 al explicar la conectiva '$\equiv$'.

T14 : $(p \supset q) \equiv (-p \vee q)$

es llamada *condicional-disyunción;* sirve para mostrar la equivalencia entre un condicional y una disyunción. Consiste en cambiar '$\supset$' por '$\vee$' y en anteponer '$-$' al antecedente del condicional.

T15 : $(p \supset q) \equiv -(p \,.\, -q)$

es llamada *condicional-conjunción;* sirve para mostrar la equivalencia entre un condicional y una conjunción. Consiste en cambiar '$\supset$' por '.' y anteponer '$-$' al consecuente y a toda la expresión.

T16a : $-(p \,.\, q) \equiv (-p \vee -q)$,

T16b : $-(p \vee q) \equiv (-p \,.\, -q)$

son *leyes de dualidad* o *leyes de De Morgan.* Fueron conocidas ya por Occam e indican que una conjunción negativa puede ser transformada en una disyunción de negaciones (T16a), y que una disyunción negativa pue-

de ser transformada en una conjunción de negaciones (T16b).

T17a : $(p \supset q) \equiv (p \equiv (p \,.\, q))$,

T17b : $(p \supset q) \equiv (q \equiv (p \vee q))$

son fórmulas llamadas *expansión;* indican que los condicionales pueden ser transformados en bicondicionales.

T18 : $((p \supset q) \,.\, p) \supset q$,

T19 : $((p \supset q) \,.\, -q) \supset -p$

son tautologías muy conocidas en la lógica clásica. T18 equivale al llamado *modus ponens,* según el cual puede afirmarse el consecuente de un condicional si se afirma su antecedente. T19 equivale al llamado *modus tollens,* según el cual puede negarse al antecedente de un condicional si se niega su consecuente.

Según manifestamos antes, podrían enumerarse otras tautologías; las 32 presentadas, junto con las reglas de inferencia que estudiaremos en § 10 son, sin embargo, suficientes para llevar a cabo las inferencias más usuales en la lógica sentencial.

§ 10. La prueba en la lógica sentencial

La lógica dedica atención considerable al examen de cómo unas fórmulas lógicas pueden derivarse de otras. Esta derivación es en lógica de naturaleza puramente formal y recibe el nombre de *deducción.* Por medio de ésta se muestra que una determinada fórmula, llamada *conclusión,* resulta de una o varias fórmulas, llamadas *premisas.* El proceso por el cual se establece que la conclusión se sigue de las premisas recibe el nombre de *prueba.* Aquí nos referimos sólo a las pruebas en la lógica sentencial.

Para derivar una cierta conclusión a partir de unas

premisas es menester sentar ciertas reglas, calificadas de *reglas de inferencia*. Llamaremos *correcta* a una inferencia que siga las reglas sentadas; *incorrecta*, a una que no las siga. Así, la inferencia:

Juan viene ⊃ Ana ríe
—(Ana ríe)

—(Juan viene),

donde la premisa aparece en las dos primeras líneas, encima de la horizontal, y la conclusión en la última línea debajo de la horizontal, es una inferencia correcta. En cambio, la inferencia:

Juan viene ⊃ Ana ríe
—(Juan viene)

—(Ana ríe)

es incorrecta. Esta última inferencia es un ejemplo de la llamada *falacia de negar el antecedente;* consiste en negar el antecedente de una premisa condicional para concluir con la negación del consecuente. El lector hará bien en precaverse contra esta falacia, muy común, lo mismo que contra la llamada *falacia de afirmar el consecuente*, que consiste en afirmar el consecuente de una premisa condicional para concluir con la afirmación del antecedente. Un ejemplo de esta última falacia es:

Juan viene ⊃ Ana ríe
Ana ríe

Juan viene.

Las reglas que sentaremos para las inferencias en la lógica sentencial son cuatro.

La primera es la llamada *regla de separación*. Se formula diciendo: "Si un condicional y su antecedente son tomados como premisas, el consecuente puede ser inferido como conclusión". Así,

Hace buen día ⊃ Rodolfo va al campo
Hace buen día

Rodolfo va al campo

es un ejemplo de inferencia en la cual se ha aplicado la regla de separación.

Esta regla no debe ser confundida con la tautología llamada *modus ponens* (Cf. T18 en § 9). La regla de separación pertenece a la metalógica y es una norma para ejecutar inferencias, en tanto que el *modus ponens* pertenece a la lógica y es una fórmula sentencial.

La *segunda* es la llamada *regla de unión*. Se formula diciendo: "Si dos enunciados son tomados como premisas, su conjunción puede ser inferida como conclusión". Así,

Maximiliano goza de buena salud
Maximiliano toma aspirina

Maximiliano goza de buena salud. Maximiliano toma aspirina

es un ejemplo de inferencia en la cual se ha aplicado la regla de unión.

Esta regla parece "intuitivamente" evidente; nada más

"natural" que afirmar la conjunción de dos enunciados si se han afirmado ya separadamente los dos enunciados. Sin embargo, un examen más detallado de la cuestión nos mostraría que la noción de "intuición" es ajena a la de prueba y que es necesario en lógica que cada etapa de una prueba sea justificada por una regla.

La *tercera* es la llamada *regla de inserción*. Se formula diciendo: "Cualquier ejemplo de tautología enumerada en § 9 puede servir de premisa en cualquier inferencia sentencial". Así,

Bebo demasiado ⊃ Me emborracho (1)
Me emborracho ⊃ Me quedo dormido (2)

Bebo demasiado ⊃ Me quedo dormido (3)

es un ejemplo de razonamiento cuya conclusión no puede ser derivada de unas premisas sino gracias a la regla de inserción. En efecto, la regla de unión nos permite derivar de (1) y de (2):

(Bebo demasiado ⊃ Me emborracho). (Me emborracho ⊃ Me quedo dormido) (4),

pero no nos permite concluir (3). Ahora bien, la regla de inserción nos permite insertar como premisa suplementaria el ejemplo siguiente de T9a:

((Bebo demasiado ⊃ Me emborracho). (Me emborracho ⊃ Me quedo dormido)) ⊃
(Bebo demasiado ⊃ Me quedo dormido) (5),

y la regla de separación nos permite concluir (3) a partir de (4) y (5).

La *cuarta* es la llamada *regla de intercambio*. Se formu-

la diciendo: "Si se da un bicondicional como premisa, se puede inferir como conclusión el resultado de intercambiar sus componentes en cualquier otra premisa". Así,

Bernardo se casa ⊃ Florinda se suicida
Florinda se suicida ≡ —(Bernardo se hace monje)

Bernardo se casa ⊃ —(Bernardo se hace monje)

es un ejemplo de aplicación de la regla de intercambio. Intercambiando 'Florinda se suicida' por '—(Bernardo se hace monje)' en 'Bernardo se casa ⊃ Florinda se suicida', se obtiene la conclusión buscada.

Con ayuda de las tautologías enumeradas en § 9 y de las cuatro citadas reglas de inferencia podremos dar ahora algunos ejemplos de prueba en la lógica sentencial. El proceso de la prueba se efectúa según las normas siguientes:

1. Se simbolizan los enunciados y las conectivas, procurando, en caso necesario, uniformar el lenguaje de acuerdo con lo indicado en § 6.

2. Se indican en líneas separadas las premisas precedidas de la letra 'P' (P1, P2, etc.).

3. Se procede a derivar la conclusión a partir de las premisas. Cada fórmula se escribe en una línea aparte, indicándose a la derecha de la misma (abreviadas) las reglas de inferencia y/o las tautologías que permiten hacer la derivación. Las abreviaturas para las tautologías (T1, T2, etc.) están indicadas en § 9. Las abreviaturas para las reglas de inferencia serán: Un. (regla de unión), Sep. (regla de separación), Ins. (regla de inserción), Int. (regla de intercambio).

4. Se indica la conclusión precedida de la letra 'C'.

Daremos dos ejemplos de prueba.

Ejemplo 1. Supongamos que se nos dan las siguientes dos premisas·

Si los precios suben, la inflación es inevitable

y:

Si los precios no suben, la deflación es inevitable.

y se nos pide derivar de ellas la conclusión:

La inflación o la deflación son inevitables.

Podemos instituir la siguiente prueba, donde las tres letras '*S*', '*I*' y '*D*' representan respectivamente 'Los precios suben', 'La inflación es inevitable' y 'La deflación es inevitable':

P1 : $S \supset I$	
P2 : $-S \supset D$	
3 : $S \vee -S$	Ins. de T3
4 : $(((S \supset I) . (-S \supset D)) .$ $(S \vee -S)) \supset (I \vee D)$	Ins. de T10
5 : $(S \supset I) . (-S \supset D)$	Un. de 1 y 2
6 : $((S \supset I) . (-S \supset D)) .$ $(S \vee -S)$	Un. de 5 y 3
C1 : $I \vee D$	Sep. de 4 y 6

Ejemplo 2. Supongamos que se nos dan las siguientes dos premisas:

Juan ama a María o de lo contrario no la habría perdonado nunca

y:

No es el caso que Juan ame a la vez a Jacinta y a María,

y se nos pide derivar de ellas la conclusión:

Si Juan ha perdonado a María, no ama a Jacinta.

Podemos instituir la siguiente prueba, donde las tres letras '*M*', '*P*' y '*J*' representan respectivamente 'Juan ama a María', 'Juan ha perdonado a María' y 'Juan ama a Jacinta':

P1 : $M \vee -P$	
P2 : $-(J \,.\, M)$	
3 : $M \equiv -\,-M$	Ins. de T4
4 : $-\,-M \vee -P$	Int. de 1 y 3
5 : $(-M \supset -P) \equiv (-\,-M \vee -P)$	Ins. de T14
6 : $-M \supset -P$	Int. de 4 y 5
7 : $-(J \,.\, -\,-M)$	Int. de 2 y 3
8 : $(J \supset -M) \equiv -(J \,.\, -\,-M)$	Ins. de T15
9 : $J \supset -M$	Int. de 7 y 8
10 : $(J \supset -M) \,.\, (-M \supset -P)$	Un. de 6 y 9
11 : $((J \supset -M) \,.\, (-M \supset -P)) \supset (J \supset -P)$	Ins. de T9a
12 : $J \supset -P$	Sep. de 10 y 11
13 : $(J \supset -P) \equiv (-\,-P \supset -J)$	Ins. de T12a
14 : $-\,-P \supset -J$	Int. de 12 y 13
15 : $P \equiv -\,-P$	Ins. de T4
C1 : $P \supset -J$	Int. de 14 y 15

§ 11. Cálculo sentencial

La lógica sentencial a que nos hemos referido puede ser *formalizada;* ello quiere decir que el lenguaje lógico presentado sumariamente puede transformarse en un *cálculo*. En el presente libro nos limitaremos a explicar brevemente los conceptos fundamentales que van anejos a la transformación mencionada.

Puesto que el lenguaje lógico puede presentarse como un cálculo, es menester precisar la diferencia entre cálculo y lenguaje. Es ésta. nientras el *lenguaje** es un sistema de signos *interpretados* y su estudio pertenece a la semántica y a la pragmática, el *cálculo* es un sistema de signos *no interpretados* y su estudio pertenece a la sintaxis. Esto significa que en el cálculo se prescinde de lo que los signos empleados designan y significan. Sin embargo, como se prevé que el cálculo se transforme en un lenguaje, se atiende en su elaboración a consideraciones de índole semántica y pragmática.

Lo primero que debe hacerse para establecer un cálculo es dar una lista de los signos empleados en él. Estos signos pueden ser *primitivos* o *definidos*. Los signos primitivos son los que no son definidos; los signos definidos son los que se introducen mediante definiciones. Esto nos lleva, antes de presentar los signos usados para el cálculo sentencial, a decir unas palabras sobre la definición.

Toda definición contiene dos expresiones unidas por el signo '= def.'. La expresión a la izquierda de '= def.' es llamada *definiendum* (o signos que hay que definir); la expresión a la derecha de '= def.' es llamada *definiens* (o signos que definen el *definiendum*). Así, la definición es una convención según la cual el *definiendum* puede sustituir al *definiens*. Por ejemplo:

$$2 = \text{def. } 1 + 1,$$
$$(p \cdot q) = \text{def. } \neg(\neg p \vee \neg q) \qquad (1)$$

son definiciones.

Se observará que las definiciones usadas en el cálculo son diferentes de las definiciones verbales que tienen lu-

* Empleamos aquí "lenguaje' en un sentido técnico, distinto del sentido general en que ha sido usado en § 1.

gar con ayuda del diccionario. En estas últimas, un vocablo es definido en función de otro vocablo, sin que haya vocablos que funcionen como signos primitivos no definidos. Las definiciones del diccionario son por ello círculos viciosos. En cambio, en las definiciones del cálculo todo signo no primitivo se define en función de ciertos signos primitivos.

Entre los tipos posibles de definición usados en el cálculo, mencionamos dos: la definición *explícita* y la *contextual*. La definición explícita define al *definiendum* fuera de cualquier contexto. Así,

$$2 = \text{def. } 1 + 1$$

es una definición explícita. La definición contextual define al *definiendum* dentro de un contexto. Así,

$$(p \supset q) = \text{def. } (-p \vee q) \qquad (2)$$

es una denición contextual, porque define el sigr o '$\supset$' en el contexto '$(p \supset q)$'.

Con ayuda de las definiciciones podemos, si queremos, reducir el número de las conectivas. Hasta ahora hemos usado todas las conectivas: '$-$', '$\cdot$', '$\vee$', '$\supset$', '$\equiv$' y '$\not\equiv$', pero ya hemos visto en (1) que '$\cdot$' puede ser eliminado en favor de '$-$' y '$\vee$'. A la vez, en (2) hemos eliminado '$\supset$', también en favor de '$-$' y '$\vee$'. El lector recordará que en § 7 y en § 9 definimos '$\equiv$' en términos de '$\supset$' y '$\cdot$'. Con lo cual hemos podido prescindir de '$\cdot$', '$\supset$' y '$\equiv$'. Si se tiene en cuenta que '$\not\equiv$' es la negación de '$\equiv$', resultará que nos han quedado como signos primitivos '$-$' y '$\vee$'. Ahora bien, podríamos introducir un signo que nos permitiría eliminar todas las conectivas

hasta ahora usadas. Es el signo '↓' o *negación conjunta* (introducido por M. N. Sheffer en 1913), que se lee 'ni . . . ni'. Así,

$$p \downarrow q$$

se lee 'ni p ni q'. Ejemplo de este esquema es:

Ni los alemanes son chinos, ni los canadienses son árabes,

que es verdadero, porque sus componentes son falsos, razón por la cual puede expresarse también mediante el esquema:

$$-p \,.\, -q.$$

Los valores de verdad de '↓' se expresan en la tabla:

p	q	$p \downarrow q$
V	V	F
F	V	F
V	F	F
F	F	V

Con ayuda de '↓' podemos definir las dos conectivas '–', y '∨':

$$-p = \text{def. } (p \downarrow p),$$
$$(p \vee q) = \text{def. } -(p \downarrow q).$$

Análogas reducciones podríamos establecer con otro signo: el signo '|' o *negación alternativa* (asimismo introducido por Sheffer). Según la negación alternativa, una fórmula de dos letras unidas por '|' es verdadera con tal

que una de las dos letras sea falsa. Con ayuda de '|' definiremos ahora '–' y '∨':

$$-p = \text{def.}\ (p \mid p),$$
$$(p \vee q) = \text{def.}\ (-p \mid -q).$$

Observemos que los signos que aparecen en un cálculo como primitivos pueden aparecer en otro cálculo como definidos, y a la inversa. Más abajo, por ejemplo, adoptaremos como signos primitivos '–' y '∨' y definiremos las dos conectivas '↓' y '|'.

Procedamos ahora a presentar los signos del cálculo sentencial. Adoptaremos las dos series de signos siguientes:

1. *Signos primitivos:*

(a) Las letras sentenciales '*p*', '*q*', '*r*', '*s*', '*p'*', '*q'*', '*r'*', '*s'*', etc.;

(b) Las conectivas '–' y '∧';

(c) Los paréntesis '(' y ')'.

2. *Signos definidos:*

(a1) Las conectivas '.', '⊃', '≡', '≢', '↓' y '|', definibles como:

$$(p \ . \ q) = \text{def.}\ -(-p \vee -q),$$
$$(p \supset q) = \text{def.}\ (-p \vee q),$$
$$(p \equiv q) = \text{def.}\ ((p \supset q) \ . \ (q \supset p)),$$
$$(p \not\equiv q) = \text{def.}\ -(p \equiv q),$$
$$(p \downarrow q) = \text{def.}\ (-p \ . \ -q),$$
$$(p \mid q) = \text{def.}\ (-p \vee -q).$$

Los signos del cálculo sentencial se agrupan en fórmulas sentenciales. Las fórmulas pueden ser de dos clases:

(a) Bien formadas, como '$(p \supset q)$', '$(p \vee (q \,.\, r))$', etc.;

(b) Mal formadas, como '$p \supset$ ', '$p \vee \downarrow q$', etc.

La diferencia entre (a) y (b) es sintáctica. Sin embargo, se observará que mientras '$(p \supset q)$' y '$(p \vee (q \,.\, r))$' son capaces de tener significación, '$p \supset$ ' y '$p \vee \downarrow q$' no son capaces de tenerla. Así, la diferencia sintáctica es paralela a una diferencia pragmática. Ahora bien, a pesar de este paralelismo procederemos a definir la clase de fórmulas bien formadas por medio de reglas puramente sintácticas, llamadas *reglas de formación*.

Las reglas de formación que usaremos son tres:

(a) Las letras sentenciales están bien formadas;

(b) El resultado de insertar una fórmula bien formada en el espacio en blanco de '$-$ ' está bien formado;

(c) El resultado de insertar dos fórmulas bien formadas en los espacios en blanco de '$(\ \vee\ )$' está bien formado.

Las fórmulas bien formadas que se siguen de las reglas precedentes se dividen en tres grupos:

(a) Tautologías;

(b) Fórmulas indeterminadas;

(c) Contradicciones.

De ellas nos interesan aquí sólo las tautologías. Para identificarlas puede emplearse el siguiente método: elegir algunas fórmulas como axiomas o postulados y deducir todas las fórmulas que restan como teoremas con ayuda de ciertas reglas de inferencia.

Como axiomas pueden elegirse las cuatro tautologías:

A1 : $(p \vee p) \supset p$,
A2 : $p \supset (p \vee q)$,
A3 : $(p \vee q) \supset (q \vee p)$,
A4 : $(p \supset q) \supset ((r \vee p) \supset (r \vee q))$.

En cuanto a las reglas de inferencia, las mencionaremos, pero sin explicar su funcionamiento. Son dos:

(a) La *regla de sustitución*, que permite sustituir en una fórmula una letra sentencial por cualquier fórmula bien formada. Nos referiremos a esta regla mediante la abreviatura 'Sust.'.

(b) La *regla de separación*, cuyo mecanismo ha sido presentado en § 10. Nos referiremos a esta regla mediante la abreviatura 'Sep.'.

Los axiomas y reglas de inferencia deben cumplir, por otro lado, ciertas condiciones. Son tres:

1. Deben poder derivarse de ellos todas las tautologías del cálculo: deben ser *completos*.

2. Deben poder dar origen sólo a tautologías de cálculo: deben ser *consistentes*.

3. Ningún axioma debe ser derivable de otro, y ninguna regla de inferencia debe ser derivable de otra: deben ser *independientes*.

Aunque todas estas condiciones son igualmente importantes, el lector familiarizado con la lógica clásica habrá observado que la segunda es la *tradicionalmente* más destacada. En efecto, es fácilmente comprensible que en ningún sistema deductivo pueda admitirse la derivación de cualquier fórmula no válida. Por otro lado, el lector conocedor de la teoría deductiva matemática clásica (la que aparece, por ejemplo, en los *Elementos* de Euclides), habrá observado el papel desempeñado en ella por la condición tercera. Todas estas condiciones han planteado graves problemas en la lógica; nos referiremos brevemente a ellos en el capítulo VIII.

Para terminar presentaremos a título de ilustración algunos teoremas.

Teorema 1 : $(p \supset q) \supset ((r \supset p) \supset (r \supset q))$

Prueba : $(p \supset q) \supset ((-r \vee p) \supset (-r \vee q))$ — Sust. de 'r' por '$-r$' en A4,

fórmula que puede ser abreviada:

$$(p \supset q) \supset ((r \supset p) \supset (r \supset q))$$

en virtud de la definición de '$=$'.

Teorema 2 : $p \supset (p \vee p)$ — Sust. de 'q' por 'p' en A2.

Teorema 3 : $p \supset p$

Prueba : (1) $((p \vee p) \supset p) \supset ((p \supset p \vee p)) \supset (p \supset p))$ — Sust. de 'p' por '$p \vee p$', de 'q' por 'p', y de 'r' por 'p' en el Teorema 1.

(2) $(p \supset (p \vee p)) \supset (p \supset p)$ — Sep. de (1) y A1.

(3) $p \supset p$ — Sep. de (2) y Teorema 2.

Teorema 4 : $-p \vee p$ — Del Teorema 3, en virtud de la definición de '$\supset$'.

Teorema 5 : $p \vee -p$

Prueba : (1) $(-p \vee p) \supset (p \vee -p)$ — Sust. de 'p' por '$-p$' y de 'q' por 'p' en A3.

(2) $p \vee -p$ — Sep. de (1) y Teorema 4.

§ 12. Lógicas polivalentes

Al final de § 8 hemos hecho alusión a lógicas sentenciales en las cuales los valores de verdad admitidos son más de dos. Se trata de las lógicas polivalentes. Fueron estudiadas ante todo por Jan Lukasiewicz (1920) y Emil Post (1921). El primero propuso una lógica de tres valores; el segundo, una de un número finito cualquiera, *n*, de valores. Más tarde, Lukasiewicz y Alfred Tarski desarrollaron lógicas polivalentes con un número infinito de valores.

En esta sección nos referiremos sólo a las lógicas finitamente polivalentes. Por las mismas entendemos lógicas tales como: de 3 valores (trivalente), de 4 valores (tetravalente), de 5 valores (pentavalente) y, en general, de un número cualquiera, *n* (donde $n > 2$), de valores (*n*-valente).

Ahora bien, el método de las tablas de verdad presentado en § 8 para la lógica sentencial bivalente puede ser extendido a las lógicas polivalentes. En vez de dos predicados metalógicos, tendremos entonces tres o más predicados. Para facilitar la construcción de tablas se emplean entonces números —de '1' a '*n*'— en vez de letras. En rigor, los números pueden ser usados también en la lógica sentencial bivalente; así, las tablas de § 8 hubieran podido presentarse sustituyendo 'V' por '1' y 'F' por '2'.

Como vamos a presentar aquí solo tablas para la lógica trivalente, nos limitaremos a bosquejar dos interpretaciones posibles de los valores '1', '2' y '3'.

Según la primera interpretación, '1', '2' y '3' son considerados como predicados semánticos, de modo que:

'1' es correlacionado con el predicado semántico 'es verdadero',

'2' es correlacionado con el predicado semántico 'no es verdadero ni falso',

'3' es correlacionado con el predicado semántico 'es falso'.

Según la segunda interpretación, '1', '2' y '3' son considerados como predicados pragmáticos, de modo que:

'1' es correlacionado con el predicado pragmático 'se sabe que es verdadero',

'2' es correlacionado con el predicado pragmático 'no se sabe ni que es verdadero ni que es falso',

'3' es correlacionado con el predicado pragmático 'se sabe que es falso'.

Las tablas de verdad para las lógicas polivalentes son, naturalmente, más complicadas que las construidas para la lógica bivalente. Presentaremos aquí las tablas para las seis conectivas familiares al lector, en la lógica trivalente. La columna de referencia para una sola letra sentencial en tal lógica es:

p
1
2
3

que indica que para una letra sentencial hay —si adoptamos la interpretación semántica— tres posibilidades: 'es verdadera', 'no es verdadera ni falsa', 'es falsa', y —si adoptamos la interpertación pragmática— tres posibilidades: 'se sabe que es verdadera', 'no se sabe ni que es verdadera ni que es falsa', 'se sabe que es falsa'.

Las columnas de referencia para dos letras sentenciales son:

p	q
1	1
2	1
3	1
1	2
2	2
3	2
1	3
2	3
3	3

A base de estas columnas de referencia, formaremos dos tablas de verdad: una, para la conectiva singular '$-$'; otra, para las conectivas binarias mencionadas en § 7.*

La tabla de verdad para '$-p$' en la lógica trivalente es:

p	$-p$
1	3
2	2
3	1

La tabla de verdad general para las conectivas binarias es:

p	q	$p \cdot q$	$p \vee q$	$p \not\equiv q$	$p \supset q$	$p \equiv q$
1	1	1	1	3	1	1
2	1	2	1	2	1	2
3	1	3	1	1	1	3
1	2	2	1	2	2	2
2	2	2	2	3	1	1

* Las tablas que aquí presentamos son las más usadas en la literatura lógica y también las intuitivamente más comprensibles; varios lógicos han presentado tablas distintas, que no incluiremos.

p	q	$p.q$	$p \vee q$	pq	$p \supset q$	$p \equiv q$
3	2	3	2	2	1	2
1	3	3	1	1	3	3
2	3	3	2	2	2	2
3	3	3	3	3	1	1

Naturalmente, la misma comprobación de valores de verdad de una fórmula molecular cualquiera dados los valores de verdad de las fórmulas componentes que se había hecho en la lógica bivalente, podría hacerse en la lógica trivalente y, en general, en una lógica *n*-valente. La complicación sería, sin embargo, mucho mayor.

Entre los problemas suscitados por las lógicas polivalentes, hay tres que merece la pena destacar brevemente.

El primero es el problema, ya indicado, de la interpretación de sus valores de verdad.

El segundo concierne a las objeciones que se han dirigido contra la lógica bivalente, que algunos consideran insuficiente para expresar los valores de verdad "graduados" que se manifiestan, ya en el lenguaje ordinario, en expresiones tales como "no completamente", "casi", "más o menos", etc. Las objeciones contra la lógica bivalente podrían, sin embargo, formularse también contra toda lógica finitamente polivalente; sólo la lógica infinitamente polivalente parece escapar a ellas.

El tercero toca al uso de las lógicas polivalentes en el lenguaje científico, especialmente en el de la física. Hans Reichenbach ha manifestado, por ejemplo, la utilidad de la lógica trivalente para la física cuántica y, en general, la fecundidad para la física de la llamada *lógica probabilitaria*, en la cual se correlaciona cada valor de verdad con un cierto grado de probabilidad.

§ 13. Lógicas modales

Según vimos, la fórmula '$-p$' puede leerse:

No es el caso que p.

De modo similar, la fórmula 'p' puede leerse:

Es el caso que p.

Ahora bien, junto a expresiones tales como 'Es el caso que' y 'No es el caso que', hallamos en el lenguaje cotidiano expresiones como:

Es necesario que,
Es posible que,
Es imposible que,

las cuales son llamadas *expresiones modales* o *modalidades*. Su estudio lógico fue emprendido por Aristóteles, desarrollado por Teofrasto, los estoicos, Boecio y muchos autores medievales*. A fines del siglo XIX fue reasumido por Hugh MacColl, y a principios del siglo actual por C. I. Lewis. Posteriores investigaciones al respecto in-

* Aristóteles y muchos escolásticos incluyeron entre las expresiones modales:

Es contingente que p,

la cual puede ser considerada como el resultado de la conjunción:

Es posible que p. Es posible que no p.

Sin embargo, el sentido de 'Es contingente que' ha sido debatido con frecuencia; gran número de autores se han inclinado a reducir 'Es contingente que' a 'Es posible que' y, por lo tanto, 'No es contingente que' a 'No es posible que'.

cluyen, entre otros, autores como Oscar Becker y Rudolf Carnap.

Nos confinaremos a Lewis. Este autor selecciona como primitiva la expresión 'Es posible que p', la cual es simbolizada por '$\blacklozenge p$'. A base de ello traduce:

Es imposible que p

por:

$$-\blacklozenge p$$

y:

Es necesario que p

por:

$$-\blacklozenge -p.$$

El lector comprobará fácilmente que si se selecciona como primitiva la expresión 'Es imposible que p', las dos expresiones 'Es posible que p' y 'Es necesario que p' podrán ser definidas respectivamente: 'No es imposible que p' y 'Es imposible que $-p$'. Comprobará asimismo que si se selecciona como primitiva la expresión 'Es necesario que p', las dos expresiones 'Es posible que p' y 'Es imposible que p' podrán ser definidas respectivamente: 'No es necesario que $-p$' y 'Es necesario que $-p$'.

Con el fin de manejar el símbolo '$\blacklozenge$', Lewis ha sentado varios conjuntos de axiomas y reglas de inferencia que han dado origen a varias lógicas modales. El más conocido conjunto se compone de los siguientes siete axiomas, en los cuales '$p \prec q$' es una abreviatura de '$-\blacklozenge -(p \supset q)$':

AM1 : $(p \,.\, q) \prec (q \,.\, p)$,
AM2 : $(p \,.\, q) \prec p$,
AM3 : $p \prec (p \,.\, p)$,
AM4 : $((p \,.\, q) \,.\, r) \prec (p \,.\, (q \,.\, r))$,

AM5 : $((p \prec q) . (q \prec r)) \prec (p \prec r)$,
AM6 : $(p . (p \prec q)) \prec q$,
AM7 : $\blacklozenge (p . q) \prec \blacklozenge p$,

y de tres reglas de inferencia que se llaman: *sustitución modal, separación modal* e *intercambio modal.*

A base de los axiomas modales y reglas de inferencia enumerados, puede probarse que si una fórmula dada 'p' es un teorema del cálculo sentencial y es, por ende, lógicamente válida, entonces '$\vdash \blacklozenge \sim p$' es un teorema del cálculo modal de Lewis. De acuerdo con ello, muchos lógicos han adoptado para '$\vdash \blacklozenge \sim p$' la traducción metalógica:

'p' es lógicamente válida;

para '$\vdash \blacklozenge \sim (p \supset q)$' o '$p \prec q$' la traducción metalógica:

'p' implica lógicamente 'q';

y para '$\vdash \blacklozenge \sim (p \equiv q)$' o '$p \equiv q$' la traducción metalógica:

'p' es lógicamente equivalente a 'q'.

Las dos últimas traducciones se basan en:

1. El hecho de que si un condicional dado '$p \supset q$' es lógicamente válido, puede decirse que el antecedente 'p' implica lógicamente su consecuente 'q';

2. El hecho de que si un bicondicional dado '$p \equiv q$' es lógicamente válido, el primer componente 'p' es lógicamente equivalente al segundo componente 'q'.

Como Russell había llamado ya a '$\supset$' *implicación material,* y a '$\equiv$' *equivalencia material,* Lewis decidió dar a su '$\prec$' el nombre de *implicación lógica* o *estricta,* y a '$\equiv$' el nombre de *equivalencia lógica* o *estricta.*

Entre los teoremas de la lógica modal de Lewis mencionaremos:

1 : $\vdash \blacklozenge \sim p \prec p$,
2 : $p \prec \blacklozenge p$,

$3 : - \blacklozenge p \prec -p,$
$4 : -p \prec \blacklozenge -p,$
$5 : (- \blacklozenge -p \,.\, - \blacklozenge -q) \equiv - \blacklozenge -(p \,.\, q),$
$6 : (\blacklozenge p \vee \blacklozenge q) \equiv \blacklozenge (p \vee q),$
$7 : \blacklozenge (p \,.\, q) \prec (\blacklozenge p \,.\, \blacklozenge q),$
$8 : (- \blacklozenge -p \vee - \blacklozenge -q) \prec - \blacklozenge -(p \vee q),$
$9 : - \blacklozenge p \equiv (p \prec -p),$
$10 : - \blacklozenge -p \equiv (-p \prec p),$
Etc.

Algunos de estos teoremas eran conocidos de Aristóteles (*De Int.* 22 a 15 - 55) y de los escolásticos, quienes los formularon dentro de la llamada *doctrina de las consecuencias modales*. De ellas mencionamos tres:

La que corresponde al teorema 1: *Ab oportere ad esse valet consequentia.*

La que corresponde al teorema 2: *Ab esse ad posse valet consequentia.*

La que corresponde al teorema 3: *Ab non posse ad non esse valet consequentia.*

Las modalidades han planteado varios problemas que han sido largamente debatidos en los últimos años. Enumeramos tres:

1. El problema de forjar un método mecánico, paralelo al de las tablas de verdad, con el fin de decidir si una fórmula dada es o no un teorema.

2. El problema de forjar cálculos para las llamadas *modalidades superiores*, tales como 'Es posible que sea necesario que *p*', 'Es necesario que sea posible que *p*', etc.

3. El problema de empalmar las modalidades con el resto de la lógica moderna, y en particular con la lógica cuantificacional, que será objeto de nuestro próximo capítulo.

III. LÓGICA CUANTIFICACIONAL

§ 14. Argumento y predicado

En la lógica sentencial nos hemos ocupado de enunciados y de sus combinaciones. Una letra sentencial podía representar cualquier enunciado; un ejemplo de '*p*' podía ser:

Luis ríe,

pero también:

> En un lugar de la Mancha, de cuyo nombre no quiero acordarme, no ha mucho tiempo que vivía un hidalgo de los de lanza en astillero, adarga antigua, rocín flaco y galgo corredor,

sin que importara, pues, la composición de los enunciados. La lógica cuantificacional trata, en cambio, de tal composición. El término 'cuantificacional' se debe a que en los enunciados que estudia dicha lógica desempeñan un papel fundamental los adjetivos 'todos' y 'algunos', llamados *cuantificadores*. Estudiaremos éstos en § 15. Por el momento, conviene detenerse en la composición misma de los enunciados.

Para entenderla, utilizaremos ciertas nociones corrientes en la gramática. Según los gramáticos, el enunciado (lo que llaman *oración*) se compone de dos miembros: el sujeto y el predicado. En el enunciado:

Simón llora (1),

el sujeto es 'Simón' y el predicado es 'llora'. En el enunciado:

Simón lee el diario (2),

el sujeto es 'Simón' y el predicado es 'lee el diario'. A su vez, el predicado se compone de verbo o de verbo y complemento (o complementos). En (1) tenemos sólo verbo (intransitivo). En (2) tenemos, además, un complemento ('el diario'); el verbo entonces es transitivo. Ahora bien, la lógica propone considerar, de un lado, los sujetos y los complementos como una de las partes del enunciado y, del otro, los verbos como otra de las partes. De este modo, el enunciado singular se descompone en:

1. Sujetos y/o complementos, llamados *argumentos;*
2. Verbos, llamados *predicados.*

Las otras partes de la oración se incorporan a 1 o a 2. Así, los adverbios y las proposiciones pueden considerarse como partes de predicados, como lo muestra el ejemplo:

Pablo se dirige velozmente hacia su casa,

donde 'velozmente hacia' funciona como parte de 'dirigirse velozmente hacia'.

Procedamos ahora a simbolizar las partes componentes de los enunciados. Los argumentos serán simbolizados por las letras *'w'*, *'x'*, *'y'*, *'z'* y, en caso necesario, por las mismas letras seguidas de acentos: *'w'*, *'x'*, *'y'*, *'z'*, *'w''*, *'x''*, *'y''*, *'z''*, etc. Éstas serán llamadas *letras argumentos.* Los predicados serán simbolizados por las letras *'F'*, *'G'*, *'H'* y, en caso necesario, por las mismas letras seguidas de acentos: *'F'*, *'G'*, *'H'*, *'F''*, *'G''*, *'H''*, etc. Éstas serán llamadas *letras predicados.* Las letras argumentos y las letras predicados forman *esquemas cuantificacionales atómicos,* tales como *'Fx'*, *'Fxy'*, *'Gx'*, *'Gxyz'*, etc. Estos esquemas tienen sus ejemplos. Así,

El Everest es alto

puede considerarse como un ejemplo de:

Fx,

si '*x*' se lee 'El Everest' y '*F*' se lee 'es alto'. Por otro lado,

El Everest es más alto que el Mont Blanc

puede considerarse como un ejemplo de:

Fxy,

si '*x*' se lee 'El Everest', '*y*' se lee 'el Mont Blanc' y '*F*' se lee 'es más alto que'. No obstante, la sustitución de letras argumentos por sujetos y/o complementos no sigue forzosamente la simple correlación antes indicada. Así como hay muchos modos de leer una letra sentencial, hay muchos modos de leer un esquema cuantificacional atómico. El enunciado:

Juana habla mal de Raquel

puede considerarse como un ejemplo de:

Fx,

si '*x*' se lee 'Juana' y '*F*' se lee 'habla mal de Raquel'. Pero puede considerarse también como un ejemplo de:

Fxy,

si '*x*' se lee 'Juana', '*y*' se lee 'Raquel' y '*F*' se lee 'habla mal de'. Análogamente, el enunciado:

El tren va de Barcelona a Valencia

es un ejemplo de:

$$Fx,$$

si 'x' se lee 'El tren' y 'F' se lee 'va de Barcelona a Valencia', pero es un ejemplo de:

$$Fxyz,$$

si 'x' se lee 'El tren', 'y' se lee 'Barcelona', 'z' se lee 'Valencia' y 'F' se lee 'va de . . . a'.

Según contengan una o más letras argumentos, los esquemas cuantificacionales atómicos reciben el nombre de *monádicos* o *poliádicos*. En particular, los esquemas que contienen dos letras argumentos se llaman *diádicos*.

Los esquemas cuantificacionales atómicos se combinan para formar *esquemas cuantificacionales moleculares*, tales como:

$$Fx \supset Gy,$$

un ejemplo del cual puede ser:

Si Jacobo lee, entonces Pedro ríe.

Así, lo que en la lógica sentencial hemos escrito '$p \supset q$' puede *a veces* escribirse en la lógica cuantificacional '$Fx \supset Gy$'. La expresión 'a veces' indica que una fórmula no es siempre traducible a la otra. En efecto, el esquema cuantificacional molecular impone mayores restricciones que el esquema sentencial molecular en la sustitución de las letras. '$Fx \supset Gy$', por ejemplo, es una fórmula en la cual los argumentos y los predicados son distintos; tal condición no aparece en '$p \supset q$', donde los argumentos o los predicados pueden ser los mismos. Ejemplos de '$p \supset q$' pueden ser:

Si Jacobo lee, entonces Jacobo ríe (3),
Si Jacobo lee, entonces Pedro lee (4).

Ni (3) ni (4) pueden ser simbolizados por '$Fx \supset Gy$'. (3), donde los argumentos son los mismos y los predicados distintos, debería ser simbolizado mediante el esquema:

$$Fx \supset Gx,$$

en tanto que (4), donde los argumentos son distintos y los predicados los mismos, debería ser simbolizado:

$$Fx \supset Fy.$$

Todos los ejemplos de letras argumentos dados hasta aquí designan entidades concretas —Juan, El Everest, etc.—. Pero si tomamos el siguiente ejemplo:

Ser virtuoso tiene su recompensa,

veremos que el argumento 'ser virtuoso' no designa una entidad concreta; designa lo que llamaremos una ***entidad abstracta***. Vemos, pues, que los argumentos pueden designar entidades concretas —en cuyo caso se llaman ***argumentos individuales***— o entidades abstractas —en cuyo caso se llaman *argumentos predicados*—.* Las entidades designadas por argumentos individuales no ofrecen dificultad. No así las designadas por argumentos predicados; su *status* ontológico ha sido largamente debatido por los

* Reciben este nombre porque son el resultado de transponer un predicado en argumento. Así, el predicado 'es virtuoso' en:

Ruperto es virtuoso,

aparece como argumento en:

Ser virtuoso tiene su recompensa.

filósofos y ha proporcionado materia para la famosa cuestión de los universales.

§ 15. Los cuantificadores 'todos' y 'algunos'

Los ejemplos anteriores se referían a enunciados singulares, es decir, no cuantificados. Supongamos ahora los siguientes enunciados:

Todos los franceses son europeos	(1),
Ningún ecuatoriano es griego	(2),
Algunos turcos son asiáticos	(3),
Algunos irlandeses no son norteamericanos	(4).

(1) es un ejemplo de las llamadas en la lógica tradicional *proposiciones universales afirmativas* o *proposiciones de tipo A*, representadas por 'Todos los S son P'; (2), un ejemplo de las llamadas *proposiciones universales negativas* o *proposiciones de tipo E*, representadas por 'Ningún S es P'; (3), un ejemplo de las llamadas *proposiciones particulares afirmativas* o *proposiciones de tipo I*, representadas por 'Algunos S son P'; (4), un ejemplo de las llamadas *proposiciones particulares negativas* o *proposiciones de tipo O*, representadas por 'Algunos S no son P'. Todos ellos son enunciados cuantificados. Necesitamos ahora símbolos de cuantificación: son los llamados *cuantificadores*.

Por el momento, nos referiremos sólo a enunciados de los tipos (1) y (3). Si escribimos:

$$Fx \supset Gx,$$

y sustituimos 'F' por 'es francés' y 'G' por 'es europeo', leeremos:

Si x es francés, entonces x es europeo,

con lo cual no tendremos propiamente un enunciado. Para que lo fuera, 'x' debería ser sustituido por un término singular, como en:

Si Racine es francés, entonces Racine es europeo.

El lector observará que cualquiera que sea el término singular que sustituya a 'x' en 'Si x es francés, entonces x es europeo', el resultado será siempre un enunciado verdadero. Así, para todo valor dado de 'x' o, en otros términos, para todo x:

Si x es francés, entonces x es europeo

es verdadero. Se podría, pues, escribir:

Para todos los x, si x es francés, entonces x es europeo (5),

y obtener un enunciado verdadero, expresable más idiomáticamente como sigue:

Todos los franceses son europeos.

La expresión 'Para todos los x' es simbolizada mediante el signo '(x)' llamado *cuantificador universal*. Así, la traducción simbólica de (5) será:

$$(x)\,(Fx \supset Gx) \qquad (6).$$

Tomemos ahora el esquema:

$$Fx \,.\, Gx,$$

y sustituyamos '*F*' por 'es turco' y '*G*' por 'es asiático'. El resultado será:

x es turco y x es asiático,

lo cual no es un enunciado. Para que lo fuera, deberíamos sustituir '*x*' por argumentos. Para algunos argumentos, será un enunciado verdadero; para otros argumentos, un enunciado falso. Por lo tanto, podemos escribir 'Para algunos *x*' antes de '*x* es turco . *x* es asiático', y el resultado:

Para algunos x, x es turco . x es asiático (7),

será un enunciado verdadero, que podrá expresarse más idiomáticamente escribiendo:

Algunos turcos son asiáticos.

La expresión 'Para algunos *x*' es simbolizada mediante el signo '(Ex)', llamado *cuantificador particular*. Así, la traducción simbólica de (7) será:

$$(Ex)\,(Fx \,.\, Gx) \qquad (8).$$

En los textos lógicos suelen presentarse varias lecturas de (6) y de (8). Enumeremos algunas.

Para (6) tenemos:

Todos los franceses son europeos,
Todo francés es europeo,

Cualquier francés es europeo,
Si es francés, es europeo,
etc., etc.

Para (8) tenemos:

Algunos turcos son asiáticos,
Hay turcos asiáticos,
Hay un x tal que, x es turco y x es asiático,
Hay por lo menos un x tal que, x es turco y x es asiático,
etc., etc.

Nos hemos limitado aquí a cuantificar 'x'. Sin embargo, pueden cuantificarse todas y cualesquiera letras argumentos. Así, '(w)', '(y)', '(z)', '(Ew)', '(Ey)', '(Ez)', etc., son también símbolos de cuantificación. Tenemos con ello fórmulas tales como:

$$(x)\,(y)\,(Fxy \supset Gxy) \qquad (9),$$

donde las dos letras argumentos aparecen cuantificadas universalmente. (9) puede tener como ejemplo:

Para todo x y para todo y, *si* x es compatriota de y, entonces x tiene los mismos gobernantes que y.

lectura que aparecerá ahora bien clara; una expresión más idiomática sería:

Todos los compatriotas tienen los mismos gobernantes.

Esto nos lleva a considerar brevemente lo que se llama el *alcance* de la cuantificación. Se define como el esque-

ma cuantificacional o ejemplo de esquema cuantificacional abarcado por los cuantificadores. En:

$$(x)\,(Fx \supset Gx) \qquad (10)$$

el cuantificador '(x)' abarca todo el esquema. En cambio, en:

$$(x)\,Fx \supset Gx \qquad (11)$$

el cuantificador '(x)' gobierna sólo una parte del esquema, la parte 'Fx'. Ello muestra que puede haber en los esquemas cuantificacionales dos tipos de letras argumentos:

1. Letras argumentos cuantificadas, llamadas *ligadas;*
2. Letras argumentos no cuantificadas llamadas *libres.*

Así, en (11) la segunda 'x' es ligada, por aparecer en el interior del alcance del cuantificador '(x)', y la tercera 'x' es libre, por no aparecer en el interior del alcance de ningún cuantificador.

Los esquemas con todas las letras argumentos ligadas se llaman *cerrados;* los esquemas que tienen por lo menos una letra argumento libre se llaman *abiertos.* Un ejemplo de esquema cerrado es (10); uno de esquema abierto, (11). En la literatura lógica se ha dado con frecuencia a los esquemas abiertos el nombre de *funciones sentenciales.*

Aunque los cuantificadores hasta ahora considerados aparecían prefijados a fórmulas cuantificacionales moleculares, debe advertirse que pueden también prefijarse a fórmulas cuantificacionales atómicas. Ejemplos de ello son:

$$(x)\,Fx,$$

que puede leerse:

Todo es espacial;

o:

$$(Ey)\,Fy,$$

que puede leerse:

Algo es espacial.

Los esquemas correspondientes a (2) y a (4) pueden formularse mediante los cuantificadores introducidos y el uso de '–'. Así, podemos simbolizar (2) por:

$$(x)\,(Fx \supset -Gx) \qquad (12),$$

y (4) por:

$$(Ex)\,(Fx\,.\,-Gx) \qquad (13).$$

Se observará que '–' precede a 'Gx' y no a las fórmulas completas. De ocurrir lo último, (12) se leería:

No es el caso que para todo x, si x es F, entonces x es G,

lo cual no equivaldría al sentido que tenía (12), es decir:

Para todo x, si x es F, entonces no es el caso que x sea G,

cuyo ejemplo fue:

Ningún ecuatoriano es griego.

Algo análogo podría decirse de (13).
Las expresiones:

$$(x)\,(Fx \supset Gx),$$
$$(x)\,(Fx \supset -Gx),$$
$$(Ex)\,(Fx\,.\,Gx),$$
$$(Ex)\,(Fx\,.\,-Gx)$$

son particularmente interesantes por representar respectivamente los esquemas de las proposiciones de tipos A, E, I y O a que nos hemos referido al comienzo de esta sección y que desempeñan un papel importante en la lógica clásica. Usaremos estos esquemas al presentar varias leyes en la próxima sección.

§ 16. Leyes de la lógica cuantificacional

Mostramos en § 10 que pueden efectuarse pruebas en la lógica sentencial; la misma posibilidad existe en la lógica cuantificacional. Para ello se requieren una serie de leyes y una serie de reglas de inferencia. Sin embargo, como las pruebas en la lógica cuantificacional son bastante complejas, prescindiremos de ellas. No trataremos, pues, en la presente sección de las reglas de inferencia; nos limitaremos a enumerar algunas de las leyes de la lógica cuantificacional.

El lector recordará lo que se dijo en § 9 a propósito de las tautologías en la lógica sentencial. Una fórmula como:

$$p \supset p$$

se consideró como tautológica, es decir, como incondicionalmente válida. Lo mismo podríamos decir de una fórmula como:

$$(x)\,\mathrm{Fx} \supset (x)\,Fx,$$

cuya tabla de verdad daría uves para todos los valores de verdad de sus componentes. Ahora bien, a diferencia de lo que ocurría con las leyes de la lógica sentencial, las de la lógica cuantificacional no son siempre tautologías. En efecto, la fórmula:

$$(x)\,\mathrm{Fx} \supset (Ex)\,Fx,$$

que será luego presentada como una de las leyes, es cuantificacionalmente válida, pero no sentencialmente válida. Ello quiere decir que no es una tautología. Las fórmulas usadas como leyes de la lógica cuantificacional no serán por ello llamadas *tautologías*, sino *esquemas válidos*. Las negaciones de los esquemas válidos serán llamados *esquemas contra-válidos*.

Procedemos ahora a enumerar algunos esquemas cuantificacionales válidos que sirven de leyes de la lógica cuantificacional. Precederemos cada esquema de la letra 'C' y los agruparemos por afinidad.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cla} : -(x)\ \ Fx \equiv (Ex)\ -Fx,\\
&\mathrm{Clb} : -(Ex)\ Fx \equiv (x)\ \ -Fx,\\
&\mathrm{Clc} : \ (x)\ \ Fx \equiv -(Ex)\ -Fx,\\
&\mathrm{Cld} : \ (Ex)\ Fx \equiv -(x)\ \ -Fx
\end{aligned}$$

se llaman leyes de *oposición simple*. Estas leyes muestran diversas relaciones entre cuantificadores universales y particulares. Clc, por ejemplo, muestra que un cuantificador universal es equivalente a un cuantificador particular si flanqueamos éste con signos de negación. Ejemplo de ello es la equivalencia de:

Todo es material

y:

No es el caso que algo no sea material.

Cld muestra que un cuantificador particular es equivalente a un cuantificador universal si flanqueamos éste con signos de negación. Ejemplo de ello es la equivalencia de:

Algo es material

y:

No es el caso que nada sea material.

C2a : $(x)\,(Fx \supset Gx) \equiv -(Ex)\,(Fx\,.\,-Gx)$,
C2b : $(x)\,(Fx \supset -Gx) \equiv -(Ex)\,(Fx\,.\,Gx)$,
C2c : $(Ex)\,(Fx\,.\,Gx) \equiv -(x)\,(Fx \supset -Gx)$,
C2d : $(Ex)\,(Fx\,.\,-Gx) \equiv -(Ex)\,(Fx\,.\,-Gx)$,

se llaman *leyes de oposición aristotélica*. El adjetivo 'aristotélica' subraya que estas leyes proceden de Aristóteles mismo. Para ilustración daremos cuatro ejemplos correspondientes respectivamente a C2a, C2b, C2c y C2d:

Todos los ruiseñores cantan ≡ No es el caso que algunos ruiseñores no canten,
Ningún ruiseñor canta ≡ No es el caso que algunos ruiseñores canten,
Algunos ruiseñores cantan ≡ No es el caso que ningún ruiseñor no cante,
Algunos ruiseñores no cantan ≡ No es el caso que todos los ruiseñores canten.

Las leyes de la lógica cuantificacional que trataremos a continuación merecen una atención particular por la gran importancia que tienen en la lógica clásica: son las *leyes del silogismo categórico* (las del silogismo hipotético, como recordará el lector, fueron presentadas en § 9 como leyes de la lógica sentencial). Hay varias de aquellas leyes, correspondientes a los diversos modos válidos de silogismos categóricos. Por el momento, señalamos la ley que corresponde al silogismo de la primera figura (cf. *infra*) en modo *Barbara:*

C3 : $((x)(Gx \supset Hx) \,.\, (x)(Fx \supset Gx)) \supset (x)(Fx \supset Hx)$,

uno de cuyos ejemplos es:

> Si todos los hombres son bípedos y todos los portugueses son hombres, entonces todos los portugueses son bípedos.

Hay que tener en cuenta al respecto que el famoso razonamiento:

> Todos los hombres son mortales
> Sócrates es hombre
>
> ---
>
> Sócrates es mortal

que todavía se presenta en muchos textos lógicos, desde Sexto el Empírico, como un "silogismo aristotélico", no es un silogismo, sino un ejemplo de:

$$((x)(Fx \supset Gx) \,.\, Fy) \supset Gy.$$

Cabe advertir, sin embargo, que el propio Sexto el Empírico no lo presentó como un "silogismo aristotélico", sino como un "silogismo peripatético". Aristóteles mismo no es responsable de la frecuente confusión.

Los silogismos categóricos fueron estudiados por Aristóteles en los *Primeros Analíticos* con singular penetración y amplitud; desarrollos y aclaraciones a la doctrina aristotélica se hallan en Teofrasto, en los comentaristas griegos del Estagirita, en Boecio y en muchos autores medievales. En cambio, los lógicos de la época moderna empobrecieron lamentablemente la silogística. La riqueza de ésta ha sido recuperada en la época contemporánea, pre-

cisamente en estudios hechos por autores familiarizados con la lógica matemática (Lukasiewicz, Bochenski, etc.). Ahora bien, el reconocimiento de que la silogística en su presentación clásica y en su reformulación contemporánea es más rica y precisa de lo que habían permitido suponer muchas presentaciones tradicionales, no impide advertir que el silogismo categórico sigue desempeñando un papel más bien modesto en la lógica. Sólo el interés que usualmente suscitan las leyes de la lógica cuantificacional conocidas con el nombre de silogismos nos fuerza a dedicarles un espacio considerablemente mayor del que les corresponde en la economía total de la lógica.

El silogismo categórico es un condicional que se compone de tres esquemas cuantificados; dos de estos esquemas (llamados *premisa mayor* y *premisa menor)* son el antecedente del condicional, y el otro esquema (llamado *conclusión)* es el consecuente. Cada esquema a su vez se compone de dos letras predicados. La letra predicado que está en las dos premisas y no aparece en la conclusión recibe el nombre de *término medio.* La primera letra de la conclusión se llama *término menor;* la segunda, *término mayor.* Si sustituimos cada letra predicado por una de las letras mayúsculas usadas con frecuencia en la lógica tradicional ('S', 'P' o 'M', donde 'M' indica el término medio) tenemos, entre otros esquemas, el siguiente:

$$((M\,P)\,.\,(S\,M)) \supset (S\,P),$$

que la lógica tradicional presenta en la forma:

$$\begin{array}{ll} M & P \\ S & M \\ \hline S & P \end{array}$$

bajo la cual cae el silogismo llamado *Barbara*. Este modelo recibe el nombre de *figura*. Hay cuatro figuras, que se obtienen cambiando 'S', 'P' y 'M' en las premisas mayor o menor. Son las siguientes:

Primera figura: ((M P) . (S M)) ⊃ (S P),
Segunda figura: ((P M) . (S M)) ⊃ (S P),
Tercera figura: ((M P) . (M S)) ⊃ (S P),
Cuarta figura: ((P M) . (M S)) ⊃ (S P),

en donde se comprueba que la posición del término medio es distinta en cada figura. Obsérvese que el orden de las premisas en el antecedente del silogismo es indiferente. Por ejemplo, en la primera figura el antecedente podría leerse '(S M) . (M P)' en vez de '(M P) . (S M)'.

La cuarta figura es llamada usualmente *figura galénica;* el nombre procede del médico Claudio Galeno (130-200) y la atribución se apoya en la autoridad de Averroes. Sin embargo, no se encuentra nada en tal sentido en los escritos de Galeno. Según Lukasiewicz, un escolio de autor desconocido, publicado por M. Wallies en su edición (1899) de los fragmentos de Ammonio sobre los *Primeros Analíticos*, de Aristóteles, muestra que la supuesta cuarta figura galénica se refiere a silogismos compuestos (es decir, a silogismos que tienen cuatro términos, con tres premisas y dos términos medios) y no a silogismos simples. Así, la cuarta figura propiamente dicha parece haber sido propuesta no por Galeno, sino por un lógico posterior (¿siglo VI?), de modo que los lógicos que oyeron hablar de la cuarta figura galénica no la interpretaron correctamente.

La erróneamente llamada *figura galénica* ha dado lugar a muchos debates entre los lógicos de tendencia clá-

sica. Ya desde el siglo XI algunos la han confundido con uno de los modos invertidos de la primera figura; otros han distinguido entre la primera figura invertida y la cuarta figura, pero han decidido rechazar ambas, considerándolas "innaturales". Aristóteles mismo, aunque no incluyó la cuarta figura en la división sistemática que presentó de los silogismos, dio en los *Primeros Analíticos* I, 7, 29a, 19 *ss.* una prueba mediante un silogismo perteneciente a dicha figura.

En el interior de cada figura pueden distinguirse varios *modos*. Si tomamos el esquema de la primera figura:

$$((M\ P) . (S\ M)) \supset (S\ P),$$

podemos sustituir en él:

M P por uno cualquiera de los enunciados A, E, I, O, dentro del cual se hallen las letras 'M' y 'P' en el orden: M P;

S M por uno cualquiera de los enunciados A, E, I, O, dentro del cual se hallen las letras 'S' y 'M' en el orden: S M;

S P por uno cualquiera de los enunciados A, E, I, O, dentro del cual se hallen las letras 'S' y 'P' en el orden: S P.

Si los sustituimos todos por A, tendremos el esquema:

$$(A . A) \supset A,$$

llamado modo *Barbara*, término que contiene tres veces la vocal 'A'. Si los sustituimos respectivamente por E, A, E, tendremos el esquema:

$$(E . A) \supset E,$$

llamado modo *Celarent*, término que contiene en el orden señalado las vocales 'E', 'A', 'E'. Si los sustituimos respectivamente por A, I, I, tendremos el esquema:

$$(A \,.\, I) \supset I,$$

llamado modo *Darii*, término que contiene en el orden señalado las vocales 'A', 'I', 'I'., etc., etc. Atendiendo a las combinaciones posibles de A, E, I, O, hay 64 modos posibles en cada figura, y como hay 4 figuras, ello hace un total de 256 modos. Sin embargo, sólo un cierto número de ellos son válidos. La lista tradicional más frecuente de tales modos válidos está dada en la serie de vocablos —forjados por los *veteres scholastici*— dentro de los cuales las letras 'A', 'E', 'I', 'O' indican sucesivamente el tipo de enunciado que sirve de premisa mayor, premisa menor y conclusión en cada modo:

Primera figura: *Barbara, Celarent, Darii, Ferio;*
Segunda figura: *Cesare, Camestres, Festino, Baroco;*
Tercera figura: *Datisi, Feriso, Disamis, Bocardo;*
Cuarta figura: *Calemes, Fresison, Dimatis.*

En realidad, el número de silogismos válidos no se reduce a los 15 mencionados que resultan una vez admitida la cuarta figura, sino que puede elevarse a 24. Para obtener los 9 modos restantes hay que reforzar el antecedente del silogismo con una cláusula existencial. Los modos son:

1. $(A \,.\, A) \supset I$ para la primera figura
2. $(A \,.\, E) \supset O$ id.
3. $(A \,.\, E) \supset O$ para la segunda figura
4. $(E \,.\, A) \supset O$ id.

5. (A . A) ⊃ I para la tercera figura
6. (E . A) ⊃ O id.
7. (A . E) ⊃ O para la cuarta figura
8. (E . A) ⊃ O id.
9. (A . A) ⊃ I id.

La cláusula existencial es:

'*(Ex) Fx*' en los números 1, 2, 3, 4 y 7.
'*(Ex) Gx*' en los números 5, 6 y 8.
'*(Ex) Hx*' en el número 9.

La literatura lógica clásica reconoce varios de estos modos; a cuatro de ellos —los números 5, 6, 8 y 9— les da respectivamente los nombres de *Darapti, Felapton, Bamalip* y *Fesapo*. De acuerdo con ello, varios autores presentan tablas de 19 modos en vez de la de 15 antes indicada.

Enumeradas las leyes de oposición y estudiado el silogismo categórico, procedemos a presentar ahora otros esquemas cuantificacionales válidos.

C4 : $(x)\ Fx \supset Fy$

es la *ley de especificación*, según la cual si un predicado es verdadero de todo, es verdadero de una entidad dada. Tal ley permite inferir enunciados singulares a partir de enunciados universales. Así, 'Si todo es bueno, entonces la virtud es buena' es un ejemplo de C4.

C5 : $Fy \supset (Ex)\ Fx$

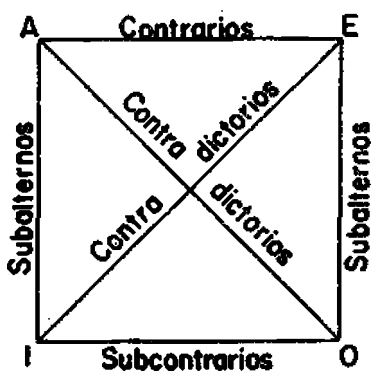
es la *ley de particularización*, según la cual si un predicado es verdadero de una entidad dada, es verdadero de

algo. Tal ley permite inferir enunciados particulares a partir de enunciados singulares. Así, 'si Thomas Mann es un escritor, entonces hay por lo menos un x tal, que x es escritor' es un ejemplo de C5.

C6a : $(x)\ Fx \supset (Ex)\ Fx$

es la *ley de subalternación*, según la cual si un predicado es verdadero de todo, lo es de algo. Tal ley permite inferir enunciados particulares a partir de enunciados universales. Así, 'Si todo es temporal, entonces algo es temporal' es un ejemplo de C6a.

La ley de subalternación exige un breve comentario. Las relaciones entre A e I y entre E y O han sido estudiadas por la lógica clásica, la cual presenta el siguiente cuadro:



del cual se deriva que:

A y O; E e I están opuestos de tal modo, que los dos no pueden ser a la vez verdaderos y los dos no pueden ser a la vez falsos. Son, pues, *contradictorios* (1);

A y E	están opuestos de tal modo, que los dos no pueden ser a la vez verdaderos, pero los dos pueden ser a la vez falsos. Son, pues, *contrarios* (2)
I y O	están opuestos de tal modo, que los dos pueden ser a la vez verdaderos, pero los dos no pueden ser a la vez falsos. Son, pues, *subcontrarios* (3);
A e I; E y O	están relacionados de tal modo, que si A es verdadero, I es verdadero; si E es verdadero, O es verdadero; pero si I es verdadero, A no es necesariamente verdadero, y si O es verdadero E no es necesariamente verdadero. Son, pues, *subalternos* (4).

Sin embargo, (4) sólo es válido si adoptamos una cierta interpretación de A y de E: la llamada *interpretación existencial*, propuesta por la lógica clásica. No es sostenible, en cambio, si se admite la interpretación usual en la lógica moderna: la *interpretación no existencial*. La interpretación existencial consiste en declarar que los ejemplos de '$(x)\ (Fx \supset Gx)$' y de '$(x)\ (Fx \supset -Gx)$' no son verdaderos si no hay x que satisfagan 'F'. Ahora bien, la interpretación existencial ofrece un inconveniente; sólo es válida de ejemplos tales como:

Todos los hombres son mortales,

pero no lo es de ejemplos tales como:

Todos los soldados bravos serán ascendidos (5),

que, sin embargo, hay que considerar verdadero sin nece-

sidad de suponer que hay, en realidad, soldados bravos y, por lo tanto, sin necesidad de suponer que 'Hay un x tal, que x es un soldado bravo' es verdadero. Esto obliga a adoptar la interpretación no existencial de A y de E y, por ende, a admitir como ejemplos de enunciados del tipo A no sólo casos como el presentado en (5), sino también otros como:

Todos los centauros son melancólicos,
Todas las sirenas son lectoras de Pérez y Pérez,

etc. La interpretación no existencial de A y de E obliga, así, por lo pronto, a abandonar (4), lo cual impide inferir I de A y O de E. Observemos, sin embargo, la validez de la ley:

C6b : $((x)\ (Fx \supset Gx)\ .\ (Ex)\ Fx) \supset (Ex)\ (Fx\ .\ Gx)$,

la cual agrega la cláusula '$(Ex)\ Fx$' y hace posible las subalternaciones A — I, E — O dentro de la moderna interpretación no existencial de A y de E. En efecto, dos ejemplos de C6b pueden ser.

(Todos los hombres son mortales . Hay hombres) ⊃ Algunos hombres son mortales,
(Todas las sirenas son lectoras de Pérez y Pérez. Hay sirenas) ⊃ Algunas sirenas son lectoras de Pérez y Pérez,

ninguno de los cuales figura entre los ejemplos de C6a.

C7a : $(x)\ \ (Fx\ .\ Gx) \equiv ((x)\ \ Fx\ \ .\ \ (x)\ \ Gx)$,
C7b : $(Ex)\ (Fx \vee Gx) \equiv ((Ex)\ Fx \vee (Ex)\ Gx)$.
C7c : $(x)\ \ (Fx \supset Gx) \supset ((x)\ \ Fx \supset (x)\ \ Gx)$,
C7d : $(Ex)\ (Fx\ .\ Gx) \supset ((Ex)\ Fx\ .\ (Ex)\ Gx)$.

son cuatro de las varias leyes que gobiernan la distribución de cuantificadores; las llamamos por ello *leyes de distribución cuantificacional.* Ejemplos de C7a, C7b, C7c y C7d son respectivamente:

Todo es interesante y curioso ≡ (Todo es interesante. Todo es curioso),
Algo es bello o armonioso ≡ (Algo es bello ∨ Algo es armonioso),
Todo lo raro es atractivo ⊃ (Todo es raro ⊃ Todo es atractivo),
Algo es horrible y sobrecogedor ⊃ (Algo es horrible. Algo es sobrecogedor).

Se observará que no todas las distribuciones de cuantificadores son válidas. Así, la distribución:

$$((Ex)\ Fx\ .\ (Ex)\ Gx) \supset (Ex)\ (Fx\ .\ Gx),$$

un ejemplo de la cual es:

(Algo es grande. Algo es pequeño) ⊃ Algo es grande y pequeño,

no es válida.

C8a : $(x)\ (p\ .\ Fx) \equiv (p\ .\ (x)\ Fx)$,
C8b : $(x)\ (Fx\ .\ p) \equiv ((x)\ Fx\ .\ p)$,
C8c : $(Ex)\ (p\ .\ Fx) \equiv (p\ .\ (Ex)\ Fx)$,
C8d : $(Ex)\ (Fx\ .\ p) \equiv ((Ex)\ Fx\ .\ p)$,
C8e : $(x)\ (p \vee Fx) \equiv (p \vee (x)\ Fx)$,
C8f : $(Ex)\ (p \vee Fx) \equiv (p \vee (Ex)\ Fx)$

son seis de las varias *leyes de confinamiento.* Tales leyes

permiten desplazar un cuantificador y hacerlo gobernar uno solo de los dos miembros de una fórmula. Cabe advertir que '*p*' no puede ser sustituido por ninguna fórmula que contenga la misma variable aparecida en el cuantificador. Para un ejemplo de ley de confinamiento elegiremos C8d. Según ella, el cuantificador puede pasar de gobernar '*(Fx . p)*' a gobernar sólo '*Fx*'. En efecto, si leemos '*Fx*' como '*x* es un intelectual lector de Kafka' y '*p*' como 'Kafka es un escritor minoritario', '*(Ex) (Fx . p)*' puede leerse 'Algunos intelectuales leen a Kafka, que es un escritor minoritario' y '*(Ex) Fx . p*' puede leerse 'Algunos intelectuales leen a Kafka y Kafka es un escritor minoritario'.

Las leyes anteriores se expresan mediante esquemas cuantificacionales monádicos. Las que enumeramos a continuación se expresan mediante esquemas cuantificacionales diádicos.

C9a : $-(x)\ (y)\ Fxy \equiv (Ex)\ (Ey)\ -Fxy,$
C9b : $-(Ex)\ (Ey)\ Fxy \equiv (x)\ (y)\ -Fxy,$
C9c : $(x)\ (y)\ Fxy \equiv -(Ex)\ (Ey)\ -Fxy$
C9d : $(Ex)\ (Ey)\ Fxy \equiv -(x)\ (y)\ -Fxy$

son *leyes de oposición diádica*, análogas a Cla – Cld, pero con esquemas que abarcan dos letras argumentos. Ejemplos de C9a y C9b son respectivamente:

No es el caso que todos los hombres amen a todas las mujeres ≡ Algunos hombres no aman a algunas mujeres,

No es el caso que algunos hombres amen a algunas mujeres ≡ Ningún hombre ama a ninguna mujer.

C10a : $(x)\ (y)\ Fxy \equiv (y)\ (x)\ Fxy$,
C10b : $(Ex)\ (Ey)\ Fxy \equiv (Ey)\ (Ex)\ Fxy$,
C10c : $(Ex)\ (y)\ Fxy \supset (y)\ (Ex)\ Fxy$

son *leyes de permutación*. Las dos primeras indican que pueden permutarse dos cuantificadores universales o dos cuantificadores particulares; la última indica que un esquema algunos-todos implica lógicamente un esquema todos-algunos.

Se observará que la conversa de C10c no es válida. En efecto, 'Alguien es amado por todos ⊃ Todo el mundo ama a alguien' es verdadero, pero 'Todo el mundo ama a alguien ⊃ Alguien es amado por todos' es falso.

§ 17. La prueba en la lógica cuantificacional

La prueba en la lógica cuantificacional es de la misma naturaleza que la prueba en la lógica sentencial; como en ésta, se trata en aquélla de derivar lógicamente una conclusión de una o varias premisas por medio de ciertas reglas de inferencia. Sin embargo, las reglas de separación, de unión, de inserción y de intercambio presentadas en § 10 no son suficientes para llevar a cabo pruebas en la lógica cuantificacional. Por un lado, se necesitan algunas otras reglas. Por otro lado, debe modificarse la regla de inserción.

Indicaremos primero en qué consiste dicha modificación, e introduciremos acto seguido las reglas complementarias requeridas.

Mientras la regla de inserción en la lógica sentencial permite insertar como premisa cualquier ejemplo de tautología de las enumeradas en § 9, la regla de inserción en la lógica cuantificacional permite insertar también cual-

quier ejemplo de esquema cuantificacional válido de los enumerados en § 16.

Así, supongamos que de las premisas:

Todas las estrellas contienen helio

y:

Hay estrellas,

se nos pide derivar la conclusión:

Algunas estrellas contienen helio.

Podemos usar como premisa suplementaria el siguiente ejemplo de C6b:

(Si todas las estrellas contienen helio. Hay estrelas) ⊃ Algunas estrellas contienen helio.

Puesto que las dos primeras premisas dan como resultado, en virtud de la regla de unión:

Todas las estrellas contienen helio. Hay estrellas,

obtendremos la conclusión buscada:

Algunas estrellas contienen helio,

mediante la regla de separación.

La regla de universalización sienta que, dada una expresión puede deducirse de ella la misma expresión precedida por un cuantificador universal

Así, dada la expresión:

x es maravilloso,

puede deducirse de ella:

Todo x es maravilloso.

La regla de reescritura sienta que, dada una expresión cuantificacional puede reescribirse cualquier letra argumento cuantificada o letra ligada (§ 15) por medio de otra letra argumento *siempre que* esta letra argumento no se halle ya ligada en la expresión en cuestión.

Así, la expresión:

$(x)\,(Ey)$ (x es distinto de y)

puede reescribirse como sigue:

$(z)\,(Ey)$ (x es distinto de y),

pero no puede reescribirse como sigue:

$(y)\,(Ey)$ (y es distinto de y).

Con ayuda de los esquemas cuantificacionales válidos que sirven de leyes de la lógica cuantificacional enumerados en § 16, de las tautologías enumeradas en § 9 y de las seis citadas reglas de inferencia podremos dar ahora algunos ejemplos de prueba en la lógica cuantificacional. El proceso de la prueba se efectúa según las normas indicadas en § 10, pero agregando a las abreviaturas de las tautologías las de los esquemas cuantificacionales válidos (Cl, C2, etc.) y abreviando las nuevas reglas de inferencia del siguiente modo: Univ. (Universalización); Re. (Reescritura).

Daremos dos ejemplos de prueba.

Ejemplo 1. Supongamos que se nos dan las siguientes dos premisas:

Ningún diabético es bohemio

y:

Todos los cubistas son diabéticos,

y se nos pide derivar de ellas la conclusión:

Ningún cubista es bohemio.

Podemos instituir la siguiente prueba, donde las letras 'D', 'B' y 'C' representan respectivamente los predicados 'es diabético', 'es bohemio' y 'es cubista'.

P1 : $(x)\ (Dx \supset -Bx)$

P2 : $(x)\ (Cx \supset Dx)$

3 : $(x)\ (Dx \supset -Bx)\ .\ (x)\ (Cx \supset Dx)$ Univ. de 1

4 : $((x)\ (Dx \supset -Bx)\ .\ (x)\ (Cx \supset Dx)) \supset (x)\ (Cx \supset -Bx)$ Ins. de C3

C1 : $(x)\ (Cx \supset -Bx)$ Sep. de 3 y 4.

Ejemplo 2. Supongamos que se nos da la siguiente premisa:

Nadie es el padre de su propio padre,

y se nos pide derivar de ella la conclusión:

Nadie es su propio padre.

Podemos instituir la siguiente prueba, donde la letra 'P' representa el predicado 'es el padre de':

P1 :	$(x)\,(w)\,(Pwx \supset -Pxw)$	
2 :	$1 \supset (w)\,(Pwy \supset -Pyw)$	Ins. de C4
3 :	$(w)\,(Pwy \supset -Pyw)$	Sep. de 1 y 2
4 :	$(x)\,(Pxy \supset -Pyx)$	Re. de 3 con 'x' en vez de 'w'
5 :	$(x)\,(Pxy \supset -Pyx) \supset (Pyy \supset -Pyy)$	Ins. de C4
6 :	$Pyy \supset -Pyy$	Sep. de 4 y 5
7 :	$(Pyy \supset -Pyy) \equiv (Pyy \equiv (Pyy \vee -Pyy))$	Ins. de T17b
8 :	$-Pyy \equiv (Pyy \vee -Pyy)$	Int. de 6 y 7
9 :	$Pyy \vee -Pyy$	Ins. de T3
10 :	$-Pyy$	Int. de 8 y 9
C1 :	$(y)\,-Pyy$	Univ. de 10.

§ 18. Cálculo cuantificacional

Procedemos ahora a dar algunas indicaciones necesarias para ampliar el cálculo sentencial presentado en § 11 a un cálculo cuantificacional (elemental). El término 'ampliar' indica que todos los elementos del cálculo sentencial son también elementos del cálculo cuantificacional.

Los signos para el cálculo cuantificacional son:

1. *Signos primitivos:*

(a) Las letras sentenciales 'p', 'q', 'r', 's', 'p'', 'q'', 'r'', 's'', etc;

(b) Las letras predicados 'F', 'G', 'H', 'F'', 'G'', 'H'', etc.;

(c) Las letras argumentos 'w', 'x', 'y', 'z', 'w'', 'x'', 'y'', 'z'', etc.;

(d) Las conectivas '$-$' y '$\vee$';

(e) Los paréntesis '(' y ')'.

2. *Signos definidos:*

(a) Las conectivas '$\cdot$', '$\supset$', '$\equiv$', '$\not\equiv$', '$\downarrow$' y '$|$';
(b) El cuantificador particular, definido como sigue:

$$(Ex)\ Fx = \text{def. } \sim(x) \sim Fx.$$

El cálculo cuantificacional exige el uso de fórmulas bien formadas en el sentido en que esta expresión ha sido definida en § 11. Las reglas de formación usadas a tal efecto son:

(a) Las letras sentenciales están bien formadas;

(b) El resultado de yuxtaponer cualquier número de letras argumentos a una letra predicado está bien formado.

(c) El resultado de escribir '( )', en cuyo espacio en blanco se inserta una letra argumento, ante una fórmula bien formada, está bien formado;

(d) El resultado de insertar una fórmula bien formada en el espacio en blanco de '$\sim$ ' está bien formado;

(e) El resultado de insertar dos fórmulas bien formadas en los espacios en blanco de '($\vee$)' está bien formado.

Como axiomas pueden emplearse A1 - A4, más:

A5 : $(x)\ Fx \supset Fy$,
A6 : $(x)\ (p \supset Fx) \supset\ (p \supset (x)\ Fx)$.

Para el cálculo cuantificacional se usan también varias reglas de inferencia. Sus nombres son: la *regla de separación*, la *regla de universalización*, la *regla de reescritura* (de variables ligadas) y la *regla de sustitución* (de letras sentenciales, letras predicados y letras argumentos). Las

reglas de separación, de universalización y de reescritura son ya conocidas del lector. La regla de sustitución ofrece complicaciones en las que no entraremos aquí.

A modo de ilustración probaremos dos teoremas del cálculo cuantificacional. Para simplificar las cosas, daremos por supuesto que las dos siguientes fórmulas bien formadas del cálculo sentencial:

$$(p \supset \sim q) \supset (q \supset \sim P)$$

y

$$((p \supset q) \,.\, (q \supset r)) \supset (p \supset r),$$

han sido obtenidas de A1-A4 como teorema 6 y teorema 7 respectivamente.

Teorema 8 : $(Fy \supset (Ex)\, Fx$.

Prueba : (1) $(x) \sim Fx \supset \sim Fy$ Sustitución de 'F' por '$\sim F$' en A5

(2) $((x) \sim Fx \supset \sim Fy) \supset (Fy \supset \sim (x) \sim Fx)$ Sustitución de 'p' por '$(x) \sim Fx$' y de 'q' por 'Fy' en Teorema 7

(3) $Fy \supset \sim (x) \sim Fx$ Sep. de (1) y (2),

fórmula que puede ser abreviada:

$$Fy \supset (Ex)\, Fx,$$

en virtud de la definición de '(Ex)'.

Teorema 9 : $(x)\,(Fx \supset (Ex)\,Fx)$.

Prueba : (1) $((x)\,Fx \supset Fy)\,.\,(Fy \supset (Ex)\,Fx)$

Un. de A5 y Teorema 8

(2) $(((x)\,Fx \supset Fy)\,.\,(Fy \supset (Ex)\,Fx)) \supset ((x)\,Fx \supset (Ex)\,Fx)$

Sustitución de '*p*' por '$(x)\,Fx$', de '*q*' por 'Fy' y de '*r*' por '$(Ex)\,Fx$' en Teorema 7

(3) $(x)\,Fx \supset (Ex)\,Fx$ Sep. de (1) y (2).

§ 19. La deducción natural

La regla de inserción difiere considerablemente de las demás reglas de inferencia estudiadas en § 10 y en § 17. En vez de encaminarnos, como hacen las otras reglas, a una nueva línea en una prueba a partir de las líneas anteriores, nos dan instrucciones para suplementar las premisas de una prueba por medio de ejemplos de varios esquemas. G. Gentzen ingenió en 1934 diversas reglas de inferencia para la lógica sentencial y para la lógica cuantificacional que son de la misma progenie que la separación, unión, intercambio, universalización y reescritura, y que nos permiten prescindir enteramente de la inserción.

Las reglas propuestas por Gentzen pueden dividirse

en dos grupos. El primer grupo consiste en las llamadas *reglas de estructura* o, si se quiere, en instrucciones de carácter muy general para llevar a cabo inferencias en cualesquiera de las dos lógicas indicadas. Una regla de estructura nos permite, por ejemplo, inferir un enunciado de sí mismo; otra regla nos permite inferir una conclusión de ciertas premisas si (1) la conclusión se sigue de las premisas inicialmente dadas y de otra premisa suplementaria, y si (2) la premisa suplementaria se sigue a su vez de las premisas inicialmente dadas; y así sucesivamente. Las reglas en cuestión se aplican tácitamente cuando se trata de ejecutar inferencias.

El segundo grupo consiste en las llamadas *reglas de eliminación* e *introducción;* específicamente, una de cada clase para cada una de las conectivas '$\supset$', '$-$', '$\cdot$', '$\vee$' y '$\equiv$', y una de cada clase para cada uno de los dos cuantificadores 'todos' y 'algunos'. La separación, ya conocida del lector, es la regla de eliminación de Gentzen para '$\supset$'; se califica de regla de eliminación para '$\supset$' porque permite inferir de dos líneas dadas en una prueba otra línea que exhibe cuando menos un '$\supset$' menos que las dos líneas antes indicadas. La universalización, por otro lado, es la regla de introducción de Gentzen para el cuantificador universal; se califica de regla de introducción para el cuantificador universal porque permite inferir de una línea dada otra línea que exhibe un cuantificador universal más que la primera línea antes indicada.

Razones de espacio nos obligan a limitarnos a enumerar las reglas de eliminación y de introducción para '$\supset$' y para '$-$'. Son las siguientes:

Regla de eliminación para '$\supset$': "El consecuente de un condicional se sigue de este condicional y de su antecedente".

Regla de introducción para '⊃': "Si una conclusión se sigue de ciertas premisas, el condicional formado por la última de estas premisas como antecedente y la conclusión originaria como consecuente se sigue de las restantes premisas".

Regla de eliminación para '—': "Un enunciado se sigue de su doble negación".

Regla de introducción para '—': "Si un enunciado y la negación del mismo se siguen de ciertas premisas, la negación de la última de estas premisas se sigue de las restantes premisas".

El uso de estas cuatro reglas puede ilustrarse del modo siguiente.

Supongamos que, como en § 10, se nos dan las premisas:

Bebo demasiado ⊃ Me emborracho

y:

Me emborracho ⊃ Me quedo dormido,

y se nos pide derivar de ellas la conclusión:

Bebo demasiado ⊃ Me quedo dormido.

Podemos primero adoptar 'Bebo demasiado' como premisa provisional, e inferir de ella y de 'Bebo demasiado ⊃ Me emborracho' la conclusión 'Me emborracho' mediante la regla de eliminación para '⊃'. Podemos luego inferir de 'Me emborracho' y 'Me emborracho ⊃ Me quedo dormido' la conclusión 'Me quedo dormido' mediante la regla de eliminación para '⊃'. Habiendo inferido 'Me quedo dormido' de las tres premisas 'Bebo demasiado ⊃ Me emborracho', 'Me emborracho ⊃ Me quedo dormido' y 'Bebo demasiado', podemos, finalmente, inferir 'Bebo demasiado ⊃ Me quedo dormido' de 'Bebo demasiado ⊃

Me emborracho' y 'Me emborracho ⊃ Me quedo dormido' solamente, mediante la regla de introducción para '⊃'

O supongamos que se nos da la siguiente premisa:

—Me emborracho ⊃ —Bebo demasiado

y se nos pide derivar de ella la conclusión:

Bebo demasiado ⊃ Me emborracho.

Podemos entonces adoptar primero 'Bebo demasiado' y '—Me emborracho' como premisas provisionales, e inferir de nuestras tres premisas tanto 'Bebo demasiado' por medio de una regla de estructura, como '—Bebo demasiado' por medio de la regla de eliminación para '⊃'. Una vez llevado esto a cabo, podemos inferir '——Me emborracho' de '—Me emborracho ⊃ —Bebo demasiado' y 'Bebo demasiado' solamente, por medio de la regla de introducción para '—'. Acto seguido podemos inferir 'Me emborracho' de '——Me emborracho' por medio de la regla de eliminación para '—'. Y hecho esto podemos, finalmente, inferir 'Bebo demasiado ⊃ Me emborracho' de '—Me emborracho ⊃ —Bebo demasiado' solamente, por medio de la regla de introducción para '⊃'.

Las reglas de inferencia propuestas por Gentzen suelen ser conocidas con el nombre de "reglas de deducción natural". Merecen este calificativo hasta cierto punto porque reflejan hasta cierto punto los modos como ordinariamente pasamos de las premisas a las conclusiones. Tales reglas han sido usadas también en varias formalizaciones del cálculo sentencial y del cálculo cuantificacional en donde nos permiten prescindir enteramente de axiomas.

IV. LÓGICA DE LA IDENTIDAD

§ 20. El signo de identidad

Presentamos ahora una lógica que no puede reducirse a la lógica cuantificacional, pero que incluye todas las notaciones de ésta más un nuevo signo. Es la *lógica de la identidad*. El nuevo signo es '$=$' o *signo de identidad*. '$=$' se lee de varios modos, todos ellos intercambiables: 'es', 'es idéntico a', 'es igual a', 'es lo mismo que', etc. Así,

$$x = y$$

se lee 'x es y', 'x es idéntico a y', etc. La negación de '$=$' se simboliza mediante el signo '$\neq$', que se lee 'no es', 'es distinto de', 'es diferente de', etc. Así,

$$x \neq y$$

se lee 'x no es y', 'x es distinto de y', etc. '$x \neq y$' será considerado aquí como una abreviatura de '$\sim(x = y)$'.

Como es obvio, '$=$' no aparece entre entidades, sino entre nombres de entidades. Sin embargo, lo que se identifican son las entidades nombradas. En:

Ariosto es el autor del *Orlando furioso* (1),

establecemos una identidad entre Ariosto y el autor del *Orlando furioso*, pero no entre los términos 'Ariosto' y 'el autor del *Orlando furioso*'. Relaciones de identidad como (1) son posibles, porque la misma entidad puede ser nombrada de varias maneras; sólo la comprobación empírica puede garantizar aquí que los dos términos que flanquean '$=$' denotan la misma entidad.

Hemos traducido arriba '=', entre otros modos, por 'es'. Esta partícula no puede siempre, empero, simbolizarse por '='. El enunciado:

Virgilio es el más famoso poeta latino (2)

puede considerarse como un ejemplo de '$x = y$' y podría, por lo tanto, expresarse de las otras formas antes indicadas, tales como:

Virgilio es idéntico al más famoso poeta latino,
Virgilio es lo mismo que el más famoso poeta latino, etc.

No así los enunciados:

Sócrates es un hombre (3),
Los limeños son peruanos (4),
La rosa es roja (5),

que *no* pueden transcribirse respectivamente:

Sócrates es idéntico a un hombre,
Los limeños son idénticos a los peruanos,
La rosa es idéntica a rojo,

y, por consiguiente, no pueden ser considerados como ejemplos de '$x = y$'. Mientras el 'es' de (2) expresa identidad, el de (3) expresa pertenencia de un miembro a una clase, el de (4) expresa inclusión de una clase en otra y el de (5) expresa predicación. Esto nos lleva a distinguir varios sentidos del verbo 'ser'.

1. El 'ser' de la *identidad*, simbolizado por '='. '=' es

flanqueado por dos términos singulares, o bien por dos nombres de clases, o bien por dos nombres de relaciones.

2. El 'ser' de la *pertenencia*, simbolizado por 'ε' (signo propuesto por Giuseppe Peano como abreviatura del griego '$\grave{\varepsilon}\sigma\tau\acute{\iota}$'), '$\varepsilon$' es flanqueado a la derecha por el nombre de una clase y a la izquierda por el nombre de una entidad perteneciente a esta clase.

3. El 'ser' de la *inclusión*, simbolizado por '$\subset$'. '$\subset$' es flanqueado a la derecha por el nombre de una clase y a la izquierda por el nombre de otra clase incluida en la primera.

4. El 'ser' de la *predicación*, implícito en el esquema '*Fx*'.

Cada uno de los mencionados sentidos del verbo 'ser' debe ser distinguido de los restantes;* sólo de este modo pueden evitarse las ambigüedades de que está afectada la noción de cópula en la lógica tradicional.

De los tres papeles mencionados desempeñados por '$=$' estudiaremos aquí sólo el primero, es decir, aquel donde '$=$' es flanqueado por nombres de individuos. Los otros dos serán estudiados respectivamente en los capítulos V y VI.

§ 21. Leyes de la lógica de la identidad

Presentaremos ahora algunas leyes de la lógica de la identidad.

I1 : $(x)(y)(x = y \supset (Fx \equiv Fy))$

* Obsérvese, con todo, que un enunciado que exprese pertenencia de un miembro a una clase puede ser interpretado como un enunciado que exprese predicación. La distinción entre 2 y 4 no debe ser, pues, concebida de un modo rígido.

es la llamada *ley de sustitutividad de la identidad.* Esta ley expresa que si dos entidades, x e y, son idénticas, lo que es verdadero de x es verdadero de y. I1 está próxima al llamado *principio de Leibniz*, según el cual dos entidades, x e y, son idénticas si tienen las mismas propiedades. No daremos aquí una expresión simbólica de este principio, pues ello exigiría cuantificar la letra predicado, uso que solamente introduciremos en el capítulo VII.

En virtud de la ley de especificación (C4), I1 implica condicionales tales como:

(Balzac = autor de *La Comedia humana*)
⊃ (Balzac es un novelista francés del siglo XIX ≡ El autor de *La Comedia humana* es un novelista francés del siglo XIX).

I2a : $(x)(x = x)$

es la *ley de reflexividad;* según ella, toda entidad es igual a sí misma. En virtud de la ley de especificación. I2a implica enunciados tales como:

César = César,
Napoleón = Napoleón,
etc.

I2a puede parecer trivial, pero sin ella son imposibles muchas transformaciones que envuelven identidad. Una consecuencia de I2a es:

I2b : $(x)(Ey)(y = x)$,

la cual implica, en virtud de la ley de especificación, enunciados tales como:

Hay un y tal, que $y =$ César,
Hay un y tal, que $y =$ Napoleón,
etc.

I3 : $(x)(y)(x = y \equiv y = x)$

es *la ley de simetría;* según ella, cuando una entidad es igual a otra, ésta es igual a la primera. I3 permite, pues, conmutar los términos de un enunciado de identidad. En virtud de la ley de especificación, I3 implica bicondicionales tales como:

(Pérez Galdós = El máximo novelista español del siglo XIX) ≡ (El máximo novelista español del siglo XIX = Pérez Galdós).

I4 : $(x)(y)(z)((x = y \cdot y = z) \supset x = z)$

es la *ley de transitividad;* según ella, cuando dos entidades son iguales a una tercera son iguales entre sí. El lector reconocerá en I4 la formulación de uno de los llamados axiomas en los *Elementos* de Euclides. En virtud de la ley de especificación, I4 implica condicionales tales como:

(Dante = El mejor poeta italiano. El mejor poeta italiano = El autor de *La Divina Comedia*) ⊃ Dante = El autor de *La Divina Comedia.*

Nuestras dos leyes finales son:

I5a : $(x)(Fx \equiv (y) \quad (y = x \supset Fy))$,
I5b : $(x)(Fx \equiv (Ey)(y = x \ . \ Fy))$.

En virtud de la ley de especificación, I5a y I5b implican respectivamente bicondicionales tales como:

Cicerón es romano ≡ Todo lo que es idéntico a Cicerón es romano,
Cicerón es romano ≡ Hay algo idéntico a Cicerón que es romano.

§ 22. Cuantificadores numéricos

En § 15 leímos '*(Ex)*' como 'Hay por lo menos un *x*, tal que' y llamamos a '*(Ex)*' un cuantificador particular. Sin embargo, hay otros cuantificadores particulares; se expresan como sigue:

Hay a lo sumo un *x*, tal que,
Hay exactamente un *x*, tal que,

y, en general:

Hay por lo menos *n x*, tales que,
Hay a lo sumo *n x*, tales que,
Hay exactamente *n x*, tales que,

que son llamados *cuantificadores numéricos*. Se observará que 'por lo menos *n*' no implica 'a lo sumo *n*'. Así,

Tengo por lo menos dos dedos

no implica que tenga a lo sumo dos dedos. A la vez, 'a lo sumo *n*' no implica 'por lo menos *n*'. Así,

Tengo a lo sumo dos sombreros

no implica que tenga por lo menos dos sombreros. Finalmente, 'exactamente n' es sinónimo de 'por lo menos n y a lo sumo n'. Así,

Tengo exactamente una cabeza

es igual a decir que tengo por lo menos una cabeza y a lo sumo una cabeza.

El análisis de los cuantificadores numéricos se hace posible mediante la introducción de '='. En efecto, 'Hay por lo menos 2 entidades que tienen la propiedad F' puede ser traducido por:

$$(Ex)(Ey)((Fx \,.\, Fy) \,.\, x \neq y),$$

es decir:

Hay x e y, tales que Fx, Fy, y x es distinto de y.

Del mismo modo 'Hay por lo menos 3 entidades que tienen la propiedad F' se traducirá por:

$$(Ex)\,(Ey)\,(Ez)\;\;((Fx \,.\, Fy \,.\, Fz) \,.\, (x \neq y \,.\, x \neq z \,.\, y \neq z)),$$

es decir:

Hay x, y, z, tales que Fx, Fy y Fz y x, es distinto de y, x es distinto de z e y es distinto de z,

y así sucesivamente. Para expresar el hecho de que hay por lo menos n entidades que tienen la propiedad F, se escribirá, pues, una fórmula compuesta de n cuantificadores particulares y una conjunción compuesta de: (1) n factores indicando que hay n entidades que tienen la propiedad F, y (2) toda la serie de desigualdades necesarias

para indicar que las n entidades en cuestión son todas distintas entre sí.

Como 'Hay a lo sumo n entidades que tienen la propiedad F' es la negación de 'Hay por lo menos $n+1$ entidades que tienen la propiedad F', 'Hay a lo sumo 1 entidad que tiene la propiedad F' se traducirá por:

$$-(Ex)\,(Ey)\,((Fx\,.\,Fy)\,.\,x \neq y) \qquad (1);$$

'Hay a lo sumo 2 entidades que tienen la propiedad F' se traducirá por:

$$-(Ex)(Ey)(Ez)\;\;((Fx\,.\,Fy\,.\,Fz)\,.\\ (x \neq y\,.\,x \neq z\,.\,y \neq z)) \qquad (2),$$

y así sucesivamente. El lector comprobará que (1) es equivalente a:

$$(x)\,(y)\,((Fx\,.\,Fy) \supset x = y),$$

y que (2) es equivalente a:

$$(x)\,(y)\,(z)\,((Fx\,.\,Fy\,.\,Fz) \supset (x = y \vee x = z \vee y = z)).$$

Para expresar el hecho de que hay a lo sumo n entidades que tienen la propiedad F, se escribirá, pues, una fórmula compuesta de $n+1$ cuantificadores universales y un condicional afirmando que si $n+1$ entidades tienen la propiedad F, entonces 2 de estas entidades son idénticas.

Finalmente, como, según vimos, 'exactamente n' es sinónimo de 'por lo menos n y a lo sumo n'. 'Hay exactamente 1 entidad que tiene la propiedad F' se traducirá por:

$$(Ex)\,Fx\,.\,(x)\,(y)\,((Fx\,.\,Fy) \supset x = y);$$

'Hay exactamente 2 entidades que tienen la propiedad F' se traducirá por:

$$(Ex)(Ey)((Fx \,.\, Fy) \,.\, x \neq y) \,.\, (x)(y)(z)\,((Fx \,.\, Fy \,.\, Fz) \supset (x = y \vee x = z \vee y = z)),$$

y así sucesivamente.

Como advertimos, no hubiera sido posible introducir cuantificadores numéricos antes de presentar el signo '='. Ésta es la razón por la cual han sido tratados en la lógica de la identidad.

§ 23. Descripciones

La lógica de la identidad acoge también en su seno a la lógica de las llamadas *descripciones*. Las descripciones son expresiones que se inician con el artículo determinado singular 'el' o 'la', tales como 'La Reina de Inglaterra', 'El autor de *Los de abajo*', etc., y que pretenden nombrar una entidad dada, esto es, la Reina de Inglaterra, el autor de *Los de abajo*, etc.

Consideremos ante todo los siguientes cuatro enunciados:

El Rey de Francia es anglófobo (1),
El autor de *Principia Mathematica* era inglés (2),
La Reina de Inglaterra es calva (3),
El autor de *Los de abajo* es mexicano (4).

Los tres primeros enunciados son falsos; el cuarto, verdadero. (1) es falso, porque no hay Rey de Francia; (2) es falso, porque los autores de *Principia Mathematica* son dos; (3) es falso, porque aun cuando hay por lo menos una

y a lo sumo una Reina de Inglaterra, esta Reina no es calva. Se sigue de ello que para que un enunciado descriptivo de la forma:

El tal es tal y cual

sea verdadero, debe satisfacer tres condiciones:

(a) Debe haber por lo menos un tal;

(b) Debe haber a lo sumo un tal;

(c) El tal en cuestión, cuya existencia y carácter único son requeridos por (a) y (b), debe ser tal y cual. (1) es falso, porque no satisface la condición (a); (2) es falso, porque no satisface la condición (b); (3) es falso, porque no satisface la condición (c).

Por otro lado, (4) es verdadero, porque satisface todas las tres condiciones. Por lo tanto, es equivalente a:

Hay por lo menos un x, tal, que x compuso *Los de abajo;* nadie sino x compuso *Los de abajo,* y x es mexicano (5).

Intentemos ahora traducir (5) a nuestro lenguaje lógico. Si abreviamos 'compuso *Los de abajo*' por '*C*' y 'es mexicano' por '*M*', obtenemos un resultado preliminar:

$(Ex)\,(Cx.$ nadie sino x compuso *Los de abajo.* $Mx)$ (6).

Pero decir que nadie sino x compuso *Los de abajo* es decir que quienquiera compuso *Los de abajo* es idéntico a x, es decir:

$$(y)\,(Cy \supset y = x).$$

(6) puede, así, transformarse en:

$$(Ex)\,(Cx\,.\,(y)\,(Cy \supset y = x)\,.\,Mx). \qquad (7)$$

Podemos condensar algo (7). Decir que x compuso *Los de abajo* es decir que quienquiera es idéntico a x compuso *Los de abajo* (Cf. I5a), es decir:

$$(y)\ (y = x \supset Cy).$$

Pero

$$(y)\,(y = x \supset Cy)\ .\ (y)\,(Cy \supset y = x)$$

es, en virtud de C7a y de T13, equivalente a:

$$(y)\ (Cy \equiv y = x).$$

Si así es, podemos condensar (7) y leer:

$$(Ex)\,((y)\,(Cy \equiv y = x)\ .\ Mx) \qquad (8).$$

Por lo tanto, (8) servirá como versión de (4):

El autor de *Los de abajo* es mexicano,

o:

El x tal, que x compuso *Los de abajo*, es mexicano.

Es habitual, desde Russell, abreviar la expresión 'el x, tal, que' mediante '(ιx)'. Si así es, (4) o:

El x, tal, que x compuso *Los de abajo*, es mexicano

puede ser abreviado:

$$M\ (\iota x)\ Cx.$$

(8) servirá, así, para dar una versión de:

$$M\ (\iota x)\ Cx. \qquad (9).$$

A base del precedente análisis podemos generalizar sustituyendo las constantes predicados de (8) y de (9) por cualesquiera dos letras predicados, tales como '*F*' y '*G*', y ofrecer de este modo como *definiens* para el contexto:

$$F\,(\imath x)\,Gx$$

la fórmula:

$$(Ex)\,((y)\,(Gy \equiv y = x)\,.\,Fx).$$

La definición resultante ofrece un interés considerable:

1. Proporciona un análisis del papel lógico desempeñado por los artículos determinados 'el', 'la';

2. Explicita las diversas condiciones bajo las cuales son verdaderos los enunciados descriptivos;

3. Permite eliminar todos los nombres constantes del vocabulario primitivo de un lenguaje dado;

4. Finalmente, aclara el concepto de existencia.

Los dos primeros puntos han sido dilucidados antes. En cuanto al tercero, observemos que los nombres constantes pueden ser clasificados en dos grupos:

(a) Nombres propios, como 'Sócrates', 'Quevedo', etc.;

(b) Descripciones, como 'La Reina de Inglaterra', 'El autor de *Los de abajo*', etc.

Sabemos ya cómo pueden introducirse las descripciones en un lenguaje mediante definiciones del tipo (8)-(9). No es, pues, necesario que las descripciones figuren entre los signos primitivos de un lenguaje. Pero los nombres propios pueden ser sustituidos a su vez por descripciones. Así, el nombre propio 'Sócrates' puede ser sustituido por la descripción '$(\imath x)$ (x fue un filósofo . x fue condenado a muerte en Atenas en 399 antes de J.C.)'; el nombre propio 'Quevedo' puede ser sustituido por la descripción '$(\imath x)$

(x escribió El buscón)'. De un modo general, cualquier nombre propio *'D'* puede ser sustituido por la descripción *'(ιx) Px'*, donde *'P'* es un predicado verdadero de *D* y sólo de *D*. Por tal motivo, los nombres constantes pueden ser eliminados del vocabulario primitivo de un lenguaje dado.

Antes de pasar a este último punto, establezcamos una distinción entre descripciones llamadas *vacuas*, tales como 'El autor de *Principia Mathematica*', 'El Rey de Francia', etc., que pretenden, sin conseguirlo, nombrar una entidad, y descripciones llamadas *no vacuas*, tales como 'El autor de *Los de abajo*', 'La Reina de Inglaterra', etc., que nombran efectivamente una entidad. Decir que una descripción dada *'(ιx) Gx'* es vacua equivale a decir que:

$$\neg((Ex)\ Gx\ .\ (x)\ (y)\ ((Gx\ .\ Gy \supset x = y)) \qquad (10).$$

Decir, por otro lado, que una descripción dada *'(ιx) Gx'* es no vacua equivale a decir que:

$$(Ex)\ Gx\ .\ (x)\ (y)\ ((Gx\ .\ Gy) \supset x = y) \qquad (11).$$

Abreviemos (10) por *'V (ιx) Gx'* y según ello, (11) por *'¬V (ιx) Gx'*.

Correspondiendo a las dos leyes de especificación y particularización presentadas en § 16, es decir:

$$(x)\ Fx \supset Fy$$

y:

$$Fy \supset (Ex)\ Fx,$$

obtenemos en la lógica de las descripciones:

D1 : $-V\,(,x)\,Gx \supset ((x)\,Fx \supset F\,(,x)\,Gx)$

y:

D2 : $-V\,(,x)\,Gx \supset (F\,(,x)\,Gx \supset (Ex)\,Fx)$.

Puede verse que la cláusula inicial '$-V\,(,x)\,Gx$' es esencial para la validez de D1 y D2. La premisa:

La Reina de Inglaterra está casada

implica lógicamente la conclusión:

(Ex) (x está casado),

porque la premisa implícita:

$-V\,(,x)$ (x es Reina de Inglaterra)

es verdadera. Por otro lado, la premisa:

El Rey de Francia no existe (12)

no implica lógicamente la conclusión:

(Ex) (x no existe) (13)

o:

Existe un x tal, que x *no existe*,

porque la premisa implícita:

$-V\,(,x)$ (x es Rey de Francia)

es falsa.

Teniendo a nuestra disposición el operador 'V', pode-

mos, pues, mantener bajo dominio todas las cuestiones relativas a la existencia y solucionar una paradoja, la anterior inferencia de (12) a (13), que obsesionó permanentemente a la lógica aristotélica.

Observemos, sin embargo, que si:

$$-V\ (,x)\ Gx \supset (F\ (,x)\ Gx \supset (Ex)\ Fx)$$

impide la derivación de (13) a partir de (12),

$$Fy \supset (Ex)\ Fx$$

no la impide. Dos salidas son aquí posibles:

(a) Admitir dentro de la lógica cuantificacional sólo constantes argumentos no vacuos;

(b) Eliminar todas las constantes argumentos de la lógica cuantificacional y admitirlos en la lógica de la identidad únicamente a guisa de descripciones.

Esta segunda salida es la más conveniente; resulta factible por la mencionada reducción de argumentos a descripciones.

D1 y D2 son sólo dos de las más importantes leyes que gobiernan a '$(,x)$'. Concluiremos con algunas otras leyes:

D3a : $((,x)\ Fx = (,x)\ Fx) \equiv -V\ (,x)\ Fx$,
D3b : $((,x)\ Fx \neq (,x)\ Fx) \equiv V\ (,x)\ Fx$.

En virtud de D3a y de '$-V\ (,x)$ (x es Reina de Inglaterra), obtenemos: 'La Reina de Inglaterra = La Reina de Inglaterra'; en virtud de D3b y de '$V\ (,x)$ (x es Rey de Francia)', obtenemos: 'El Rey de Francia ≠ El Rey de Francia'.

D4 : $((,x)\ Fx = (,x)\ Gx) \equiv ((,x)\ Gx = (,x)\ Fx)$,

D5 : $(((\iota x)\, Fx = (\iota x)\, Gx) \,.\, ((\iota x)\, Gx = (\iota x)\, Hx)) \supset ((\iota x)\, Fx = (\iota x)\, Hx)$,

D6 : $((\iota x)\, Fx = (\iota x)\, Gx \supset (H\,(\iota x)\, Fx \equiv H\,(\iota x)\, Gx)$.

D3-D6 pueden llamarse respectivamente *leyes de reflexividad, de conmutación, de transitividad y de sustitutividad para las descripciones.*

Nuestra próxima ley da un simple equivalente de '$-V\,(\iota x)\, Fx$':

D7 : $-V\,(\iota x)\, Fx \equiv (Ey)\,(y = (\iota x)\, Fx)$.

Nuestra última ley muestra que dos descripciones '$(\iota x)\, Fx$' y '$(\iota x)\, Gx$' denotan la misma entidad si y sólo si 'Fx' y 'Gx' son formalmente equivalentes:

D8 : $-V\,(\iota x)\, Fx \supset (((\iota x)\, Fx = (\iota x)\, Gx) \equiv (x)\,(Fx \equiv Gx))$.

V. LÓGICA DE LAS CLASES

§ 24. La noción de clase

Hasta ahora hemos representado enunciados del tipo:

Kierkegaard es danés (1),
El Amazonas es un río (2),
El oro es codiciado (3),

mediante esquemas como '*Fx*', donde '*F*' reemplaza 'es danés', 'es un río', 'es codiciado'. 'Es danés', 'es un río', 'es codiciado' son considerados como predicados, y por eso '*F*' fue llamada una *letra predicado*. Ahora bien, como vimos en § 20, el verbo 'ser' puede ser interpretado de otras formas; una de ellas es la que expresa pertenencia de un miembro a una clase. Entonces se simboliza mediante el signo 'ε' que se lee 'pertenece a la clase de', 'es miembro de la clase de'. Así, (1), (2) y (3) pueden ser leídos respectivamente:

Kierkegaard es un miembro de la clase de los daneses,
El Amazonas es un miembro de la clase de los ríos,
El oro es un miembro de la clase de cosas codiciadas,

o, en símbolos:

Kierkegaard ε danés,
El Amazonas ε un río,
El oro ε codiciado.

Con ello introducimos en la lógica una nueva noción: la noción de *clase*, que será objeto del presente capítulo.

En el lenguaje ordinario, la clase es a veces concebida como un agregado. Sin embargo, no debe confundirse un agregado con una clase. El libro que el lector tiene en sus manos es un agregado formado por un cierto número de páginas y por un cierto número (menor) de pliegos; se trata en ambos casos de la misma entidad, pero la clase del número de páginas no es igual que la clase del número de pliegos. Tampoco debe confundirse una clase con un todo del cual los miembros sean partes. Por ejemplo, la clase de todas las letras 'm' (de todas las emes) que aparecen en esta página no es un todo del cual cada una de las letras 'm' sea una parte. Agregado y todo son entidades concretas; la clase, en cambio, es una entidad abstracta, aun cuando sus miembros sean entidades concretas. Así, cada uno de los árboles es una entidad concreta, pero la clase de los árboles es una entidad abstracta.

En la literatura lógica se ha debatido con frecuencia qué relación hay entre la clase y la propiedad. Algunos autores las identifican; otros rechazan tal identificación. No nos pronunciaremos al respecto. Observaremos simplemente que a toda clase corresponde (por lo menos) una propiedad, y que a toda propiedad corresponde una clase. Decimos 'por lo menos', porque, por ejemplo, a la propiedad de ser humano corresponde la clase de los hombres, pero a la clase de los hombres corresponden otras propiedades además de la de ser humano (verbigracia, la propiedad de ser un animal racional). La propiedad puede ser considerada como la comprensión de la clase; la clase puede ser considerada como la extensión de la propiedad.

Como nombres de clases nos serviremos aquí de los llamados *abstractos*. Un abstracto designa la clase de todas las entidades que tienen una propiedad dada. Así, un abstracto es una expresión del tipo 'la clase de todos los x

tales, que *Fx*', o 'los *x* tales, que *Fx*'. Simbólicamente, se formula mediante la expresión:

$$\hat{x}\ Fx,$$

donde '$\hat{x}$' es llamada una letra encapuchada.* Así, el enunciado:

Kierkegaard ε danés,

equivale a:

Kierkegaard ε $\hat{x}$ (*x* es danés),

ejemplo del esquema general:

$$y \in \hat{x}\ Fx.$$

Consideraremos el esquema anterior como una paráfrasis de:

$$Fy.$$

Por ejemplo, el enunciado:

Kierkegaard es $\hat{x}$ (*x* es danés)

será considerado como una paráfrasis de:

Kierkegaard es danés.

Podemos adoptar ahora una notación abreviada para representar las clases que sea más manejable que el uso

* 'Letra encapuchada' es una abreviatura de 'letra con acento circunflejo'. Por lo demás, el acento circunflejo es llamado por los impresores *capucha*.

de abstractos. Adoptaremos a este respecto las letras '*A*', '*B*', '*C*', etc. que reemplazarán un abstracto cualquiera. Según ello,

$$x \in A$$

se leerá:

x es un miembro de la clase *A*,

lo cual es una abreviatura de cualquiera de los enunciados:

$$x \in \hat{y}\ Fy.$$

$$x \in \hat{w}\ Gws,$$

$$x \in \hat{z}\ Hwxz,$$

etc.

§ 25. Nociones del algebra de clases

Con ayuda de la nueva notación estaremos ahora en disposición de presentar algunas nociones fundamentales del álgebra de las clases. Esta álgebra fue desarrollada sobre todo por el lógico inglés George Boole; se la llama por ello *álgebra booleana*. Para mayor claridad, daremos separadamente cada definición.

Inclusión. Se dice que una clase *A* está incluida en una clase *B*, cuando todos los miembros de *A* son miembros de *B*. El símbolo de inclusión de las clases es '$\subset$'. Así,

$$A \subset B \qquad (1)$$

se lee:

La clase *A* está incluida en la clase *B*,

o también:

A es una subclase de *B*.

Un ejemplo de (1) es:

La clase de las ardillas está incluida en la clase de los roedores,

que puede también escribirse:

Las ardillas son roedores.

Puesto que '$\subset$' se lee asimismo 'son', conviene evitar la confusión entre '$\subset$' y 'ε'. Nos referimos ya a este punto al dilucidar, en § 20, las distintas interpretaciones del verbo 'ser'. Como 'ε' indica pertenencia de un miembro a una clase, '$x \varepsilon A$' será verdadero si x es un miembro de A. Como '$\subset$' indica inclusión de una clase en otra, '$A \subset B$' será verdadero sólo si todos los miembros de A son miembros de B. Un ejemplo aclarará este punto. La clase de los católicos pertenece a la clase de las Iglesias cristianas, pues la clase de los católicos es una Iglesia cristiana. Sin embargo, la clase de los católicos no está incluida en la clase de las Iglesias cristianas, pues cada católico no es una Iglesia cristiana. Por otro lado, la clase de los católicos está incluida en la clase de los cristianos, pues todo católico es un cristiano. Sin embargo, la clase de los católicos no pertenece a la clase de los cristianos, pues la clase de los católicos no es ella misma un cristiano.

La definición en símbolos de la inclusión de clases es:

$$A \subset B = \text{def. } (x)\,(x \varepsilon A \supset x \varepsilon B).$$

Identidad. Se dice que una clase *A* es idéntica a una clase *B*, cuando cada miembro de *A* es miembro de *B*, y cada miembro de *B* es miembro de *A*. El símbolo de identidad entre clases es '$=$'. Así,

$$A = B \tag{2}$$

se lee:

La clase A es idéntica a la clase *B*.

Un ejemplo de (2) es:

La clase de los hombres es igual a la clase de los bípedos racionales.

La definición en símbolos de la identidad entre clases es:

$$A = B = \text{def. } (x)\,(x \in A \equiv x \in B).$$

Para expresar que una clase es distinta de otra se usa el signo '$\neq$'. Así,

$$A \neq B \tag{3}$$

se lee:

La clase *A* es distinta de la clase *B*.

Un ejemplo de (3) es:

La clase de las mujeres rubias es distinta de la clase de las ovejas negras.

La definición en símbolos de la diferencia entre clases es:

$$A \neq B = \text{def.} \sim(x)\,(x \in A \equiv x \in B).$$

Suma. Se dice que una clase C es la suma lógica de las clases A y B, cuando C es la clase compuesta de todas las entidades que pertenecen a A o a B o a ambas. El símbolo de la suma de clases es '$\cup$'. Así,

$$A \cup B \tag{4}$$

se lee:

La suma lógica de las clases A y B.

Un ejemplo de (4) es la clase de los célibes, que es la suma de la clase de los solteros y de la clase de las solteras.

La definición en símbolos de la suma lógica de clases es:

$$A \cup B = \text{def.}\ \hat{x}\,(x \in A \vee x \in B).$$

La suma lógica no obedece a todas las leyes de la suma aritmética. Así, la suma de la clase de los Apóstoles (12) y de la clase de los Evangelistas (4), es decir $\hat{x}$ (x es un Apóstol $\vee$ x es un Evangelista), no tiene 16 miembros, sino 14, pues 2 de los Evangelistas son ya Apóstoles. En la suma lógica de las clases no hay coeficientes y, por lo tanto, es válida la ley:

$$(A \cup A) = A.$$

Producto. Se dice que una clase C es el producto de las clases A y B, cuando C es la clase compuesta de todas las entidades que pertenecen a la vez a A y a B. El símbolo del producto lógico de clases es '$\cap$'. Así,

$$A \cap B \tag{5}$$

se lee:

El producto lógico de las clases A y B.

Un ejemplo de (5) es la clase de los pájaros azules, que es el producto lógico de la clase de los pájaros y de la clase de las entidades azules.

La definición en símbolos del producto de clases es:

$$A \cap B = \text{def. } \hat{x}\,(x \in A \,.\, x \in B).$$

El producto lógico no obedece a todas las leyes del producto aritmético. Si la clase A tiene 4 miembros y la clase B tiene 5 miembros, ello no significa que el producto de las clases A y B haya de tener 20 miembros. Así, el producto de la clase de los Apóstoles y de la clase de los Evangelistas, es decir, $\hat{x}$ (x es un Apóstol . x es un Evangelista), no tiene 48 miembros, sino 2. En la lógica de las clases no hay exponentes y, por lo tanto, es válida la ley:

$$(A \cap A) = A.$$

Complemento. El complemento de una clase A es la clase de todos los miembros que no pertenecen a A. El símbolo del complemento de clases es '$-$', colocado encima de la letra que designa la clase. Así,

$$\bar{A} \qquad (6)$$

se lee:

La clase de todas las entidades que no son miembros de la clase A.

Un ejemplo de (6) puede ser la clase de las entidades no mortales si A es la clase de las entidades mortales.

La definición en símbolos del complemento de clases es:

$$\bar{A} = \text{def. } \hat{x} \, \neg(x \in A).$$

Clase universal. La clase universal es la clase a la cual pertenece todo. El símbolo de la clase universal es 'V'. Si tomamos la fórmula:

$$x = x,$$

que se lee:

x es idéntico a x,

veremos que '$x = x$' es satisfecho por todo. Así, la clase universal podrá definirse:

$$\mathrm{V} = \text{def. } \hat{x} \, (x = x).$$

Clase nula. La clase nula (o vacía) es la clase a la cual no pertenece nada. El símbolo de la clase nula es 'Λ'. Si tomamos la fórmula:

$$x \neq x,$$

que se lee:

x es distinto de x,

veremos que '$x \neq x$' no es satisfecho por nada. La clase nula podrá pues, definirse:

$$\Lambda = \text{def. } \hat{x} \, (x \neq x).$$

Con ayuda de la clase nula podremos introducir ahora el concepto de las clases mutuamente exclusivas y de las clases que se intersecan (o traslapan).

Dos clases, A y B, mutuamente exclusivas son dos clases en las cuales ningún miembro de A es miembro de B, y ningún miembro de B es miembro de A. El hecho de que dos clases, A y B, sean mutuamente exclusivas puede ser, pues, expresado por:

$$A \cap B = \Lambda .$$

Un ejemplo de dos clases mutuamente exclusivas es: la clase de los números positivos y la clase de los números negativos.

Dos clases, A y B, que se intersecan son dos clases que tienen por lo menos un miembro común. El hecho de que dos clases, A y B, se intersequen puede ser, pues, expresado por:

$$A \cap B \neq \Lambda .$$

Un ejemplo de dos clases que se intersecan es: la clase de los números positivos y la clase de los números pares.

Como se observará, las nociones del álgebra booleana han sido definidas con ayuda de conectivas sentenciales. Así,

'$A \subset B$' ha sido definido con ayuda de '$\supset$';
'$A = B$' ha sido definido con ayuda de '$\equiv$';
'$A \cup B$' ha sido definido con ayuda de '$\vee$';
'$A \cap B$' ha sido definido con ayuda de '$\cdot$';
'$\overline{A}$' ha sido definido con ayuda de '$\sim$'.

Ahora bien, lo mismo que unas conectivas sentenciales

podían ser definidas por medio de otras, los signos usados en el álgebra booleana pueden ser definidos por medio de otros signos de la misma álgebra. Así, en:

$$A \cup B = \text{def. } \overline{(\overline{A} \cap \overline{B})} \qquad (7),$$

'$\cup$' es definido por medio de '$-$' y '$\cap$'. En:

$$A \cap B = \text{def. } \overline{(\overline{A} \cup \overline{B})} \qquad (8),$$

'$\cap$' es definido por medio de '$-$' y '$\cup$'.

(7) y (8) son las llamadas *leyes de De Morgan*, que fueron formuladas en § 9 para el cálculo sentencial como leyes de dualidad. Incluiremos esas leyes en § 28.

§ 26. Representación gráfica de las clases

Una clase *A* puede ser representada mediante un área (generalmente, un círculo) inscrita en una superficie dada, la cual representa la clase universal o el *llamado universo del discurso*. Así, la representación gráfica de la clase *A* será el diagrama:

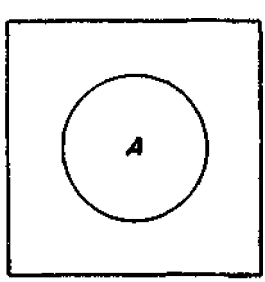


Diagrama 1

Este simple expediente constituye el principio de la representación mediante diagramas de las nociones presentadas en § 25. Así, la inclusión de una clase *A* en una clase *B* puede representarse mediante dos círculos concéntricos inscritos en la superficie dada antes referida:

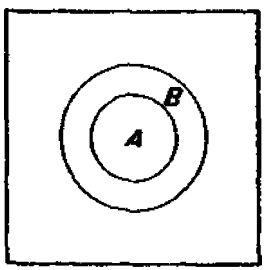


Diagrama 2

Con ello se muestra gráficamente que todos los miembros de *A* son miembros de *B*. El diagrama 2 es conocido con el nombre de *diagrama de Euler*, por suponerse que su inventor fue el matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783). De hecho, según indica G. Vacca (*apud* L. Couturat), tal diagrama fue ya empleado antes por Leibniz.

La suma de dos clases, *A* y *B*, puede ser representada mediante el área total de dos círculos que se intersecan:

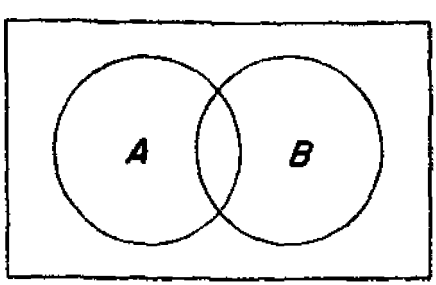


Diagrama 3

Con ello se muestra gráficamente la clase compuesta de todas las entidades que pertenecen a *A* o a *B* o a ambas.

El producto de dos clases, *A* y *B*, puede representarse mediante el área (marcada 'x') de intersección de dos círculos:

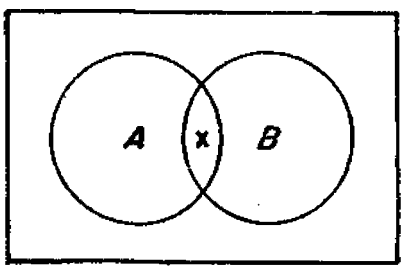


Diagrama 4

Con ello se muestra gráficamente la clase compuesta de todas las entidades que pertenecen a la vez a *A* y a *B*.

Dado un círculo que representa la clase *A*, el complemento de *A*, $\bar{A}$, se representa mediante el área exterior a *A*:

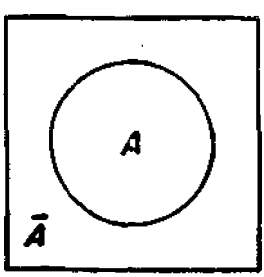


Diagrama 5

Con ello se muestra gráficamente que $\bar{A}$ es la clase de todos los miembros que no pertenecen a *A*.

La representación gráfica de la identidad de dos cla-

ses, *A* y *B*, se efectúa mediante dos círculos que coinciden en todos sus puntos. El resultado es un solo círculo inscrito en una superficie:

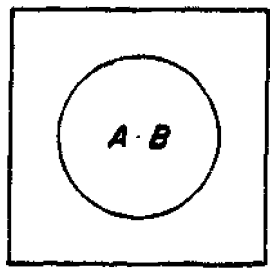


Diagrama 6

Dos clases, *A* y *B*, mutuamente exclusivas se representan mediante dos círculos sin ningún punto común.

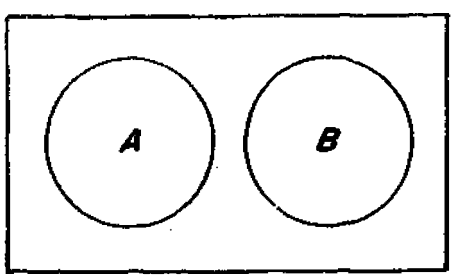


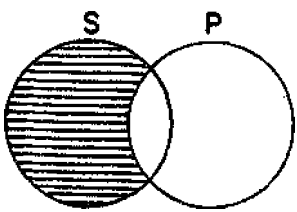
Diagrama 7

§ 27. El silogismo en el álgebra de clases

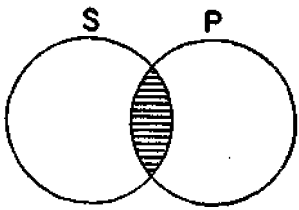
La representación gráfica de las clases nos permite reintroducir el silogismo, tratado ya en § 16, y presentar un método para comprobar mecánicamente la validez o no validez de cualquier razonamiento silogístico.

Cualquiera de los llamados términos del silogismo puede, en efecto, ser considerado como expresando una clase. Así, las ya mencionadas letras 'S', 'P' y 'M' designarán cla-

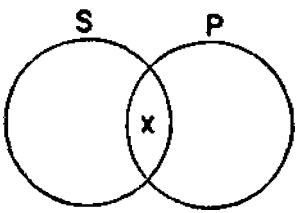
ses. Si aceptamos como principio que cada una de ellas puede ser representada gráficamente mediante un círculo, y queremos dar los diagramas de las proposiciones A, E, I y O, tendremos las siguientes figuras:



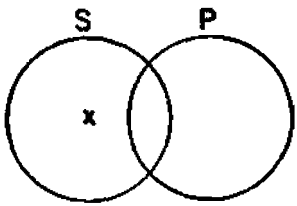
A: Todos los S son P
Diagrama 1



E: Ningún S es P
Diagrama 2



I: Algunos S son P
Diagrama 3



O: Algunos S no son P
Diagrama 4

Para la construcción de estas figuras nos hemos atenido a las convenciones siguientes:

(a) Para indicar falta de información sobre una clase dejamos en blanco el área que la representa;

(b) Para negar la existencia de una clase sombreamos el área que la representa;

(c) Para afirmar la existencia de una clase insertamos 'x' en el área que la representa.

De acuerdo con dichas convenciones, los diagramas han sido dibujados como sigue:

Diagrama 1. Se ha sombreado el área de S que se

halla al exterior de P, afirmando así que todos los S que restan son P.

Diagrama 2. Se ha sombreado el área de intersección de S y P, afirmando así que ninguno de los S que quedan son P.

Diagrama 3. Se ha marcado con 'x' el área de intersección de S y P, afirmando así que algunos S son P.

Diagrama 4. Se ha marcado con 'x' el área de S que se halla fuera de P, afirmando así que algunos S no son P.

El mismo método puede usarse para representar gráficamente los silogismos. Para ello hay que introducir un tercer círculo, que representará otro de los términos. Como ejemplo, representaremos gráficamente las dos premisas de dos silogismos: uno en modo *Barbara* y otro en modo *Darii*.

Las dos premisas del modo *Barbara* son:

Todos los M son P
Todos los S son M.

Según ello, dibujaremos la siguiente figura:

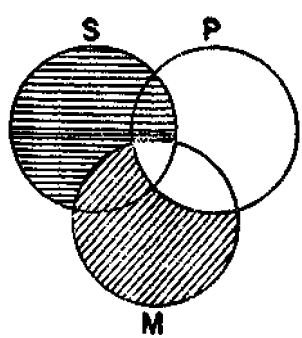


Diagrama 5

De acuerdo con el citado método, para indicar 'Todos los M son P' se ha sombreado toda el área de M que se

halla fuera de P; para indicar 'Todos los S son M' se ha sombreado toda el área de S que se halla fuera de M.

Las dos premisas del modo *Darii* son:

Todos los M son P
Algunos S son M.

Según ello, dibujaremos la siguiente figura:

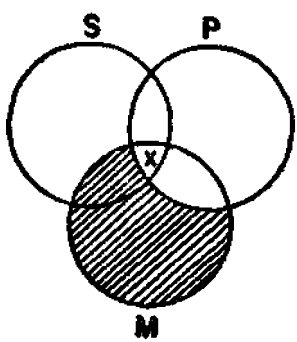


Diagrama 6

De acuerdo con el citado método, para indicar 'Todos los M son P' se ha sombreado toda el área de M que se halla fuera de P; para indicar 'Algunos S son M' se ha marcado con 'x' el espacio en blanco donde S interseca con M.

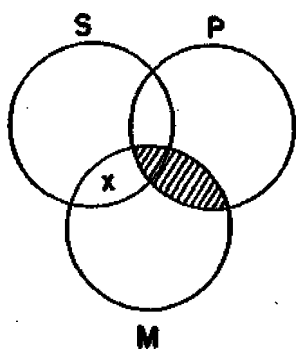
La conclusión de *Barbara*, 'Todos los S son P', y la conclusión de *Darii*, 'Algunos S son P', deben estar lógicamente implicadas en las premisas respectivas. A la vez, tales conclusiones deben quedar indicadas en las representaciones gráficas correspondientes. Comprobamos que así sucede. En el diagrama 5, 'Todos los S son P' queda

indicado por el hecho de que toda el área de S exterior a P está sombreada. En el diagrama 6, 'Algunos S son P' queda indicado por el hecho de que hay 'x' en una parte del área común a S y a P.

Daremos a continuación seis ejemplos de silogismos y comprobaremos si las conclusiones están o no indicadas en los correspondientes diagramas.

Ejemplo 1.

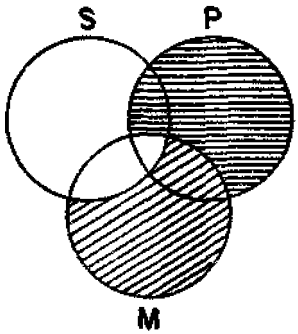
Ningún filósofo es miope	Ningún M es P
Algunos finlandeses son filósofos	Algunos S son M
Algunos finlandeses no son miopes	Algunos S no son P



El silogismo es válido (*Ferio*, primera figura).

Ejemplo 2.

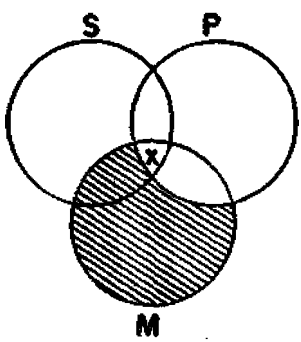
Todos los españoles son toreros	Todos los P son M
Todos los toreros son solteros	Todos los M son S
Todos los solteros son españoles	Todos los S son P



El silogismo no es válido.

Ejemplo 3.

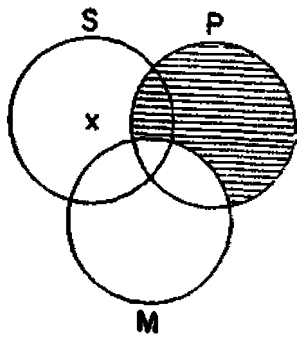
Todos los médicos son impacientes	Todos los M son P
Algunos médicos son sordos	Algunos M son S
Algunos sordos son impacientes	Algunos S son P



El silogismo es válido (*Datisi*, tercera figura).

Ejemplo 4.

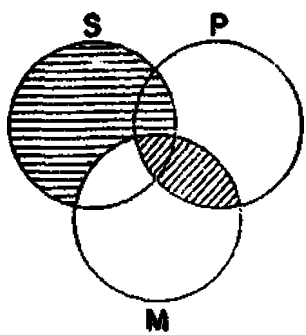
Todos los fumadores de pipa son calmosos	Todos los P son M
Algunos metafísicos no son calmosos	Algunos S no son M
Algunos metafísicos no son fumadores de pipa.	Algunos S no son P



El silogismo es válido (*Baroco*, segunda figura).

Ejemplo 5.

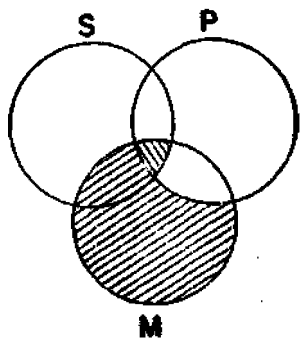
Ninguna flor es fea	Ningún P es M
Todas las hierbas son feas	Todos los S son M
Ninguna hierba es una flor	Ningún S es P



El silogismo es válido (*Celarent*, segunda figura).

Ejemplo 6.

Todas las novelas son divertidas	Todos los M son P
Ningún poema es una novela	Ningún S es M
Ningún poema es divertido	Ningún S es P



El silogismo no es válido.

Estas representaciones gráficas han sido evidentemente sugeridas por el llamado *método de Euler* expuesto en la sección anterior. Fueron propuestas por el lógico inglés John Venn en su obra *Symbolic Logic* (1881, 2ª ed., revisada, 1894). Desde entonces son conocidas con el nombre de *diagramas de Venn*.

§ 28. Leyes del álgebra de clases

En el mismo sentido en que puede erigirse un cálculo sentencial, puede erigirse un cálculo de clases. Se usan a este efecto los siguientes signos:

1. Conectivas sentenciales: '$-$', '$\cdot$', '$\vee$', '$\supset$' y '$\equiv$'.

2. Símbolos booleanos, distribuidos en la siguiente forma:

(a) Los predicados '$\subset$', '$=$' y '$\neq$';
(b) Los operadores '$\cup$', '$\cap$' y '$-$';
(c) Las constantes 'V' y 'Λ'.

3. Símbolos de clases, para los cuales usaremos las letras '*A*', '*B*', '*C*', etc.

Las fórmulas compuestas de dichos signos son llama-

das *fórmulas booleanas*. Estas fórmulas son esquemas de enunciados. Las fórmulas booleanas válidas son paralelas a las tautologías de la lógica sentencial presentadas en § 9. Indicamos a continuación algunas de ellas, que serán consideradas como leyes del álgebra de clases.

$$B1 : A = A,$$
$$B2 : (A \cap \overline{A}) = \Lambda .$$
$$B3 : (A \cup \overline{A}) = V .$$

son respectivamente *leyes de identidad, de contradicción* y *de tercio excluso*.

$$B4 : A \subset A$$

indica que toda clase está incluida en ella misma.

$$B5 : \Lambda \subset A$$

indica que la clase nula está incluida en toda clase. En efecto, como la clase nula no tiene miembros, todos sus miembros son miembros de toda clase.

$$B6 : A \subset V$$

indica que toda clase está incluida en la clase universal. En efecto, como todo pertenece a la clase universal, todos los miembros de toda clase son miembros de la clase universal.

$$B7 : (A \cup A) = A,$$
$$B8 : (A \cap A) = A$$

indican respectivamente las leyes especiales que distin-

guen la suma y el producto lógicos de la suma y el producto aritméticos a que nos hemos referido en § 25.

B9 : $A = \overline{\overline{A}}$

indica que el complemento del complemento de una clase es igual a la misma clase.

B10a : $(A \cap B) \subset A$,
B10b : $(A \cap B) \subset B$

indican respectivamente que el producto de dos clases, A y B, está incluido en una u otra de las dos clases, A y B.

B11a : $A \subset (A \cup B)$,
B11b : $B \subset (A \cup B)$

indican que una clase A o una clase B están incluidas en la suma de las dos clases, A y B.

B12 : $(A \cup B) = (B \cup A)$

indica que el orden de los sumandos en la suma de dos clases es indiferente.

B13 : $(A \cap B) = (B \cap A)$

indica que el orden de los factores en el producto de dos clases es indiferente.

B14a : $((A \cap B) \cap C) = (A \cap (B \cap C))$,
B14b : $((A \cup B) \cup C) = (A \cup (B \cup C))$

pueden ser llamadas *leyes de asociación;* indican que la

agrupación de factores de un producto de clases y de sumandos de una suma de clases es indiferente.

$$\text{B15a} : (A \cup B) = \overline{(\bar{A} \cap \bar{B})}$$
$$\text{B15b} : (A \cap B) = \overline{(\bar{A} \cup \bar{B})},$$

son las *leyes de De Morgan* ya indicadas al final de § 25.

$$\text{B16a} : \overline{(A \cup B)} = (\bar{A} \cap \bar{B})$$
$$\text{B16b} : \overline{(A \cap B)} = (\bar{A} \cup \bar{B}),$$

son corolarios de B15a y B15b.

$$\text{B17} : (A \subset (B \cap C)) \equiv ((A \subset B) . (A \subset C))$$

indica que una clase A está incluida en un producto de dos clases, B y C, si y sólo si A está incluida en B y A está incluida en C.

$$\text{B18} : ((A \cup B) \subset C) \equiv ((A \subset C) . (B \subset C))$$

indica que la suma de dos clases, A y B, está incluida en una clase C, si y sólo si A está incluida en C y B está incluida en C.

$$\text{B19} : (A \subset B) \equiv (\bar{B} \subset \bar{A})$$

indica que una clase A está incluida en una clase B si y sólo si el complemento de B está incluido en el complemento de A.

$$\text{B20} : (A = B) \equiv (\bar{A} = \bar{B})$$

indica que dos clases, A y B, son idénticas si y sólo si sus complementos son idénticos.

$$B21 : (A = B) \equiv ((A \subset B) . (B \subset A)$$

indica que dos clases, *A* y *B*, son idénticas si y sólo si *A* está incluida en *B* y *B* está incluida en *A*.

$$B22 : \bar{\bar{\Lambda}} = V$$
$$B23 : \bar{\bar{V}} = \Lambda$$

indican que el complemento de la clase nula es igual a la clase universal y a la inversa.

$$B24 : V \neq \Lambda$$

indica que la clase universal es distinta de la clase nula.

$$B25 : (A \cap V) = A,$$
$$B26 : (A \cap \Lambda) = \Lambda,$$
$$B27 : (A \cup \Lambda) = A,$$
$$B28 : (A \cup V) = V$$

indican respectivamente que el producto de una clase *A* con la clase universal es igual a la misma clase *A*, que el producto de una clase *A* con la clase nula es igual a la clase nula, que la suma de una clase *A* con la clase nula es igual a la clase *A*, y que la suma de una clase A con la clase universal es igual a la clase universal.

VI. LÓGICA DE LAS RELACIONES

§ 29. La noción de relación

Hemos visto en § 24 que los esquemas cuantificacionales monádicos, tales como '*Fx*', '*Gx*', etc. pueden engendrar clases. Ahora veremos que los esquemas cuantificacionales poliádicos, tales como '*Fxy*', '*Gwxy*', etc., pueden engendrar relaciones. Consideremos, en efecto, los siguientes enunciados:

Ricardo ama a Celia	(1),
José es más joven que Humberto	(2),
Venus está entre Mercurio y la Tierra	(3),
El cartero entrega una carta a Mercedes	(4).

(1) y (2) pueden ser representados mediante esquemas cuantificacionales diádicos; (3) y (4), mediante esquemas cuantificacionales triádicos. Todos ellos expresan relaciones: las relaciones *amar a, ser más joven que, estar entre... y, entregar... a.* Relaciones más complicadas, correspondientes a esquemas cuantificacionales de más de tres letras argumentos, son posibles; así, por ejemplo, la proporción:

$$w : x :: y : z$$

es un ejemplo de relación tetrádica. Sin embargo, para mayor simplicidad nos atendremos a las llamadas *relaciones diádicas* o relaciones que gobiernan a dos entidades y que llamaremos desde ahora simplemente *relaciones.*

En § 24 hemos asociado con el esquema cuantificacional monádico '*Fy*' el esquema de clase '$y \in \hat{x}Fx$', que se leía:

y pertenece a la clase de todos los *x* tales, que *Fx*.

Ahora asociaremos con el esquema cuantificacional diádico '*Fwz*' el esquema relacional:

$$w\ (\hat{x}\ \hat{y}\ Fxy)\ z,$$

que se leerá:

w tiene con *z* la relación de todos los *x* a todos los *y* tales, que *Fxy*.

El abstracto usado en el esquema de clase tenía una sola letra argumento y podemos llamarlo *abstracto simple;* el abstracto usado en el esquema relacional tiene dos letras argumentos y lo calificaremos de *abstracto doble*. Un abstracto doble es una expresión como:

$$\hat{x}\ \hat{y}\ (\ldots x \ldots y \ldots),$$

que se lee:

la relación de todo *x* a todo *y* tal, que ... *x* ... *y*...

Así, la expresión:

$$\hat{x}\ \hat{y}\ (x \text{ es coetáneo de } y)$$

denotará la relación de coetaneidad. A su vez, la expresión:

$$\hat{x}\ \hat{y}\ (Ez)\ (x \text{ es hermano de } z\ .\ z \text{ está casado con } y)$$

denotará la relación *cuñado de*.

Podemos introducir ahora una notación abreviada que sea más manejable que el uso de abstractos dobles; son las letras '*Q*', '*R*', '*S*', etc. Según ella:

$$x\ R\ y \tag{5}$$

se leerá:

x tiene la relación R con y.

Ejemplos de (5) pueden ser cualquiera de los enunciados relacionales (1) y (2).

§ 30. Nociones del álgebra de relaciones

El álgebra de relaciones, elaborada por Augustus de Morgan y Charles S. Peirce, es análoga al álgebra de clases y usa los mismos conceptos que ésta. Se la llama por ello también *álgebra booleana de relaciones*. Presentaremos aquí algunas de sus operaciones fundamentales.

Inclusión. Se dice que una relación R está incluida en una relación S, en símbolos: $R \subset S$, cuando S relaciona dos entidades, x e y, cada vez que R relaciona igualmente dos entidades, x e y. La definición de la inclusión de relaciones es, según ello:

$$R \subset S = \text{def. } (x)\,(y)\,(x\ R\ y \supset x\ S\ y).$$

Así, la relación *tío paterno de* está incluida en la relación *tío de*.

Identidad. Se dice que dos relaciones, R y S, son idénticas, en símbolos: $R = S$, cuando, dadas dos entidades, x e y, x tiene con y la relación R si y sólo si x tiene con

y la relación *S*. La definición de la identidad de relaciones es, según ello:

$$R = S = def.\ (x)\ (y)\ (x\ R\ y \equiv x\ S\ y).$$

Así, la relación *tío de es* idéntica a la relación *tío paterno de* o *tío materno de*.

Suma. Se dice que una relación *Q* es la suma de dos relaciones, *R* y *S*, en símbolos: $R \cup S$, cuando *Q* es la relación de todas las entidades *x* con todas las entidades *y* tal, que *R* relaciona *x* con *y* o *S* relaciona *x* con *y* o ambas. La definición de la suma de relaciones es, según ello:

$$R \cup S = \text{def. } \hat{x}\ \hat{y}\ (x\ R\ y \vee x\ S\ y).$$

Así, la relación *tío de* es la suma de las relaciones *tío paterno de* y *tío materno de*.

Producto. Se dice que una relación *Q* es el producto de dos relaciones, *R* y *S*, en símbolos: $R \cap S$, cuando *Q* es la relación de todas las entidades *x* con todas las entidades *y* tal, que *R* relaciona *x* con *y* y *S* relaciona *x* con *y*. La definición del producto de relaciones es, según ello:

$$R \cap S = \text{def. } \hat{x}\ \hat{y}\ (x\ R\ y\ .\ x\ S\ y).$$

Así, la relación *hijo preferido de* es el producto de las relaciones *hijo de* y *preferido por*.

Complemento. El complemento de una relación *R*, en símbolos: $\overline{R}$, es la relación de todos los *x* con todos los *y* tal, que no es el caso que *R* relacione *x* con *y*. La definición del complemento de una relación es, según ello:

$$\overline{R} = \text{def. } \hat{x}\,\hat{y} - (x\,R\,y).$$

Así, si R es la relación *idéntico a*, $\overline{R}$ es la relación *distinto de*.

Relación universal. La relación universal, en símbolos: $\dot{V}$, es la relación que todo tiene con todo. La definición de la relación universal es, según ello:

$$\dot{V} = \text{def. } \hat{x}\,\hat{y}\,(x = x \,.\, y = y).$$

Relación nula. La relación nula, en símbolos: $\dot{\Lambda}$, es la relación que nada tiene con nada. La definición de la relación nula es, según ello:

$$\dot{\Lambda} = \text{def. } \hat{x}\,\hat{y}\,(x \neq x \,.\, y \neq y).$$

§ 31. Leyes del álgebra de relaciones

Como, según vimos, el álgebra de relaciones es análoga al álgebra booleana de clases, hay paralelismo entre las leyes de una y de otra. Nos limitaremos aquí a señalar algunas de las leyes de las relaciones. Para su lectura puede acudirse a los análogos presentados en § 28. Con el fin de facilitarla, haremos corresponder los números de las leyes del álgebra de relaciones con los de las leyes del álgebra de clases.

R1 : $R = R$,

R2 : $(R \cap \overline{R}) = \dot{\Lambda}$,

R3 : $(R \cup \overline{R}) = \dot{V}$

R4 : $R \subset R$,

R5 : $\dot{\Lambda} \subset R$,

R6 : $R \subset \dot{V}$

R7 : $(R \cup R) = R$,

R8 : $(R \cap R) = R$,

R10a : $(R \cap S) \subset R$,

R10b : $(R \cap S) \subset S$,

R12 : $(R \cup S) = (S \cup R)$,

R13 : $(R \cap S) = (S \cap R)$,

R15a : $(R \cup S) = \overline{(\overline{R} \cap \overline{S})}$,

R15b : $(R \cap S) = \overline{(\overline{R} \cup \overline{S})}$,

R19 : $(R \subset S) \equiv (\overline{S} \subset \overline{R})$,

R20 : $(R = S) \equiv (\overline{R} = \overline{S})$,

R21 : $(R = S) \equiv ((R \subset S) . (S \subset R))$,

R22 : $\overline{\dot{\Lambda}} = \dot{V}$

R23 : $\overline{\dot{V}} = \dot{\Lambda}$

R24 : $\dot{V} \neq \dot{\Lambda}$

R25 : $(R \cap \dot{V}) = R$,

R26 : $(R \cap \dot{\Lambda}) = \dot{\Lambda}$

R27 : $(R \cap \dot{\Lambda}) = R$,

R28 : $(R \cup \dot{V}) = \dot{V}$.

§ 32. Converso, producto relativo e imagen

Se llama *converso* de una relación R, en símbolos: $\breve{R}$, a la relación de todos los x con todos los y tales, que $y\ R\ x$. La definición del converso de una relación es, según ello:

$$\breve{R} = \text{def. } \hat{x}\ \hat{y}\ (y\ R\ x).$$

Así, el converso de la relación *mayor que* es la relación *menor que;* el converso de la relación *encima de* es

la relación *debajo de*. Consecuencia de la definición precedente es el bicondicional:

$$x \breve{R} y \equiv y R x,$$

cuyos ejemplos pueden ser:

Júpiter es mayor que Mercurio ≡ Mercurio es menor que Júpiter,
El tejado está encima del piso ≡ El piso está debajo del tejado.

Hay varias leyes en las cuales interviene la noción de converso de una relación; enumeramos las siguientes:

R31 : $R = \breve{\breve{R}}$.

Ejemplo: siendo *R la relación esposa de,* $\breve{R}$ será la relación *esposo de* y $\breve{\breve{R}}$ la relación *esposa de;* así, la relación *esposa de* es el converso del converso de la relación *esposa de.*

R32 : $(R \subset S) \equiv (\breve{R} \subset \breve{S})$.

Ejemplo: la relación *menor que* está incluida en la relación *menor que* o *idéntico a* si y sólo si la relación *mayor que* está incluida en la relación *mayor que o idéntico a.*

R33 : $(R = S) \equiv (\breve{R} = \breve{S})$.

Ejemplo: la relación *padre o madre de* es igual a la relación *progenitor de* si y sólo si la relación *hijo de* es igual a la relación *engendrado por.*

Otras leyes en las cuales interviene la noción de converso de una relación son:

$$R34 : \breve{(R \cup S)} = (\breve{R} \cup \breve{S}),$$

$$R35 : \breve{(R \cap S)} = (\breve{R} \cap \breve{S}),$$

$$R36 : \breve{\breve{R}} = R.$$

Se llama *producto relativo* (para distinguirlo de él, el producto de relaciones expuesto en § 30 se llama a veces *producto absoluto)* de una relación R con una relación S, en símbolos: $R \mid S$, a la relación de todos los x con todos los y tales, que $(Ez)\,(x\,R\,z\,.\,z\,S\,y)$. La definición del producto relativo de dos relaciones es, según ello:

$$R \mid S = \text{def. } \hat{x}\,\hat{y}\,(Ez)\,(x\,R\,z\,.\,z\,S\,y).$$

Así, si R es la relación *padre de* y S es la relación *madre de,* $R \mid S$ es la relación *abuelo materno de* y $S \mid R$ es la relación *abuela paterna de.*

Hay varias leyes en las cuales interviene la noción de producto relativo de relaciones; enumeramos las siguientes:

$$R37 : (R \subset S) \supset ((R \mid Q) \subset (S \mid Q)).$$

Ejemplo: como la relación *padre de* está incluida en la relación *padre o madre de,* la relación *abuelo materno de* está incluida en la relación *abuelo o abuela maternos de.*

$$R38 : (R \subset S) \supset ((Q \mid R) \subset (Q \mid S)).$$

Ejemplo: como la relación *padre de* está incluida en

la relación *padre o madre de*, la relación *abuela paterna de* está incluida en la relación *abuela paterna o materna de*.

El producto '$|$' no es siempre conmutativo, es decir:

$$(R \mid S) = (S \mid R)$$

no es siempre válido. Ejemplo: la relación *abuelo materno de* no es idéntica a la relación *abuela paterna de*. En cambio,

$$\breve{(R \mid S)} = (\breve{S} \mid \breve{R})$$

es válido.

El producto '$|$' es asociativo, es decir:

$$((R \mid S) \mid Q) = (R \mid (S \mid Q))$$

es válido.

Se llama *imagen* de una clase A con respecto a una relación R, en símbolos: $R'' A$, a la clase de todas las entidades que tienen la relación R con uno o más miembros de A. La definición de la imagen de una clase con respecto a una relación es, según ello:

$$R''A = \text{def. } \hat{x}\,(Ey)\ (y \in A \,.\, x\,R\,y).$$

Así, si A es la clase de los filósofos y R es la relaeión *discípulo de*, la imagen de la clase A *con respecto a* R, $R''A$, es la clase de los discípulos de los filósofos.

Hay varias leyes en las cuales interviene la noción de imagen de una clase con respecto a una relación; enumeramos algunas.

R39 : $(R \cup S)'' A = (R''A \cup S''A)$,
R40 : $R''(A \cup B) = (R''A \cup R''B)$

son dos *leyes de distribución*. Ejemplo de R39 es: los amigos o amigas de políticos son amigos de políticos o amigas de políticos. Ejemplo de R40 es: las esposas de ministros o diputados son esposas de ministros o esposas de diputados.

R41 : $(R \subset S) \supset (R''A \subset S''A)$.

Ejemplo: como la relación *padre de* está incluida en la relación *padre de o madre de*, los padres de los filósofos son padres o madres de los filósofos.

R42 : $(A \subset B) \supset (R''A \subset R''B)$.

Ejemplo: si los caballos son animales, las cabezas de los caballos son cabezas de animales.

R43 : $(R \mid Q)''A = R''(Q''A)$.

Ejemplo: las suegras de los filósofos son madres de las esposas de los filósofos.

Terminaremos con dos imágenes de V:

$$R'' \text{ V} \qquad (1),$$

$$\breve{R}'' \text{ V} \qquad (2).$$

(1) es la clase de todos los x tales, que $(Ey)\ (x\ R\ y)$. Esta clase es llamada el *dominio de* R. Así, si R es la relación *maestro de*, su dominio, R'' V, será la clase de todos los maestros.

(2) es la clase de todos los x tales, que $(Ey)\ (y\ R\ x)$. Así, si R es la relación *maestro de*, su dominio converso, R'' V, es la clase de todos los discípulos.

La suma:

$$R'' \, V \cup \breve{R}'' \, V \qquad (3)$$

recibe el nombre de *campo de R*. Ejemplo de (3) es la clase de todos los maestros y de todos los discípulos.

§ 33. Propiedades de las relaciones

Las relaciones tienen varias propiedades. Enumeraremos brevemente algunas.

Reflexividad. Una relación R se llama *reflexiva* cuando una entidad x tiene la relación R consigo misma, es decir, cuando:

$$(x)\,(x \, R \, x).$$

Ejemplos de relaciones reflexivas son las relaciones: *idéntico a, tiene la misma edad que.*

Irreflexividad. Una relación R se llama *irreflexiva* cuando una entidad x no tiene la relación R consigo misma, es decir, cuando:

$$(x) \, \overline{}(x \, R \, x).$$

Ejemplos de relaciones irreflexivas son las relaciones: *padre de, menor que, más viejo que, distinto de.*

No reflexividad. Una relación R se llama *no reflexiva* cuando no es ni reflexiva ni irreflexiva, es decir, cuando:

$$(x)\,(x \, R \, x) \downarrow (x) \, \overline{}(x \, R \, x).$$

Ejemplo de relación no reflexiva es la relación *amigo de.*

Simetría. Una relación R se llama *simétrica* cuando:

$$(x)\,(y)\,(x\,R\,y \supset y\,R\,x).$$

Ejemplos de relaciones simétricas son las relaciones *colega de, vecino de, casado con, tiene la misma edad que, distinto de.*

Asimetría. Una relación R se llama *asimétrica* cuando:

$$(x)\,(y)\,(x\,R\,y \supset -(y\,R\,x)).$$

Ejemplos de relaciones asimétricas son las relaciones *padre de, menor que, más viejo que.*

No simetría. Una relación R se llama *no simétrica* cuando no es ni simétrica ni asimétrica, es decir, cuando:

$$(x)\,(y)\,(x\,R\,y \supset y\,R\,x) \downarrow (x)\,(y)\,(x\,R\,y \supset -(y\,R\,x)).$$

Ejemplo de relación no simétrica es la relación *incluido en.*

Transitividad. Una relación R se llama *transitiva* cuando:

$$(x)\,(y)\,(z)\ ((x\,R\,y\ .\ y\,R\,z) \supset x\,R\,z).$$

Ejemplos de relaciones transitivas son las relaciones *menor que, contemporáneo de, más viejo que, incluido en, tiene la misma edad que.*

Intransitividad. Una relación R se llama *intransitiva* cuando:

$$(x)\,(y)\,(z)\ ((x\,R\,y\ .\ y\,R\,z) \supset -(x\,R\,z)).$$

Ejemplos de relaciones intransitivas son las relaciones *padre de, doble de, cuadrado de.*

No transitividad. Una relación R se llama *no transitiva* cuando no es ni transitiva ni intransitiva, es decir, cuando:

$$(x)(y)(z)\ ((x\,R\,y\,.\,y\,R\,x) \supset x\,R\,x) \downarrow (x)(y)$$
$$(z)((x\,R\,y\,.\,y\,R\,z) \supset -(x\,R\,z)).$$

Ejemplo de relación no transitiva es la relación *distinto de.*

Los diversos ejemplos hasta aquí mencionados permiten ver que una misma relación puede tener diversas propiedades. He aquí cuatro casos posibles.

1. La relación *tiene la misma edad que* es reflexiva, simétrica y transitiva.

2. La relación *padre de* es irreflexiva, asimétrica e intransitiva.

3. La relación *menor que* es irreflexiva, asimétrica y transitiva.

4. La relación *distinto de* es irreflexiva, simétrica y no transitiva.

§ 34. Funciones

En un esquema relacional '$x\ R\ y$' llamaremos a x *relacionante* y a y *relacionado.* Estableceremos entonces tres clases de relaciones.

1. Relaciones de *uno a muchos* o aquellas en las cuales todos y cada uno de los relacionados de una relación R tienen exactamente un relacionante. Ejemplo de tales relaciones es la relación de padre a hijo, pues cada uno y todos los hijos tienen exactamente un padre.

2. Relaciones de *muchos a uno* o aquellas en las cuales todos y cada uno de los relacionantes de una relación

R tienen exactamente un relacionado. Ejemplo de tales relaciones es la relación de hijo a padre, pues también todos y cada uno de los hijos tienen exactamente un padre.

3. Relaciones de *uno a uno* o aquellas en las cuales todos y cada uno de los relacionantes de una relación *R* tienen exactamente un relacionado, y todos y cada uno de los relacionados de la misma relación *R* tienen exactamente un relacionante. Ejemplo de tales relaciones es la relación de nación a capital, pues cada nación tiene exactamente una capital y cada capital lo es exactamente de una nación.

Las funciones son relaciones de uno a muchos y de uno a uno. Las funciones constituyen, pues, un tipo especial de relaciones en las que se da siempre la condición de que para todo relacionado existe sólo exactamente un relacionante. Así, la relación de padre a hijo es una función, porque para todos y cada uno de los hijos hay exactamente un padre; la relación de nación a capital es una función, porque para todas y cada una de las capitales hay exactamente una nación de la cual es capital. Otros ejemplos de funciones son las relaciones *triple de, cuadrado de, cubo de, etc.* En cambio, la relación *mayor que* no es una función, pues para cada número *y* hay un número infinito de números *x* tales, que:

$$x > y.$$

En un esquema relacional '*x R y*', donde *R* es una función, llamaremos a *y* el *argumento de R* y a *x* el *valor de R para el argumento y*. 'El valor de *R* para el argumento *y*' se expresa simbólicamente mediante la fórmula:

$$R^{\epsilon}\, y,$$

que se define:

$$(\check{}\, x)(x\, R\, y).$$

La fórmula:

$$-V\, R^{\epsilon}\, y$$

expresa el hecho de que para un argumento dado, y, R tiene exactamente un valor x. Esta fórmula puede ser verdadera de todos los y, de ningún y o de algunos y. En el primer caso, R es una función; en el segundo, no lo es; en el tercero, lo es, pero sólo relativamente a los y de los cuales '$-VR^{\epsilon}\, y$' es verdadero.

La clase de las entidades y con respecto a las cuales R es una función, o la clase:

$$\hat{y}\,(-V\, R^{\epsilon}\, y),$$

recibe el nombre de *alcance de la funcionalidad de R*. Así, el alcance de funcionalidad de la relación *doble de* es la clase de todos los números pares. En la relación *idéntico a*, el alcance de funcionalidad es la clase universal.

Las funciones pueden ser abstraídas de nombres. Así, la función *quíntuplo de* puede ser abstraída del nombre '$5x$'. La función *quíntuplo de* es, en efecto, la función cuyo valor para el argumento x es $5x$. Abreviaremos 'la función cuyo valor para el argumento x' mediante 'λ_x'. En tal caso, la función *quíntuplo de* será $\lambda_x 5x$. 'λ_x' puede definirse mediante los signos aquí ya disponibles. Así, la función *quíntuplo de*, $\lambda_x 5x$, es la relación de todos los y a todos los x tales, que y es igual a $5x$, es decir:

$$\hat{y}\,\hat{x}\,(y = 5x)$$

Todas las funciones arriba referidas son funciones de un solo argumento. Pueden introducirse también funciones de dos o más argumentos. Ejemplos de funciones de dos argumentos son las funciones *suma de*, *producto de*, etc.

VII. LÓGICA CUANTIFICACIONAL SUPERIOR

§ 35. La ampliación del lenguaje lógico

En la presentación de la lógica cuantificacional, en el capítulo III, las letras predicados '*F*', '*G*', '*H*', etc., estaban sometidas a dos restricciones:

1. No eran cuantificadas;
2. No servían como argumentos.

En el presente capítulo levantaremos estas dos restricciones y procederemos, cuando sea conveniente, a cuantificar las letras predicados o a usarlas como argumentos. Las ventajas de tal proceder son considerables. La lógica cuantificacional del capítulo III podía servir de vehículo a una limitada porción de los enunciados de la ciencia y del lenguaje cotidiano. Enunciados como:

El agua hierve a los 100 grados,

Los cuerpos se atraen en razón directa de sus masas,

Algunos amigos de Olga son odiosos

entran dentro del marco de dicha lógica cuantificacional. En cambio, enunciados como:

Hay una propiedad que el corcho y la madera poseen en común (1),

Ser conductor de electricidad es una propiedad común a ciertos materiales y el cobre es conductor de electricidad (2),

Ser odioso es poco recomendable (3)

no entran dentro de dicho marco. En efecto, (1), (2) y (3) son respectivamente ejemplos de:

$$(EF)\,(Fx\,.\,Fy) \qquad (4),$$
$$F\,(G)\,.\,Gy \qquad (5),$$
$$F\,(G) \qquad (6),$$

donde las restricciones antes indicadas han sido, en efecto, levantadas. Según se ve, en (4) se ha cuantificado una letra predicado, y en (5) y (6) se ha usado una letra predicado como argumento.* La lógica así resultante constituye una ampliación del lenguaje lógico capaz de servir de vehículo a considerable número de enunciados del lenguaje científico y del lenguaje cotidiano. La lógica cuantificacional del capítulo III era una lógica cuantificacional elemental, y sólo por motivos de economía la llamamos simplemente *lógica cuantificacional.* La lógica cuantificacional que aquí presentamos recibe el nombre de *lógica cuantificacional superior.*

Esta lógica usa los signos siguientes:

1. *Signos primitivos.*

(a) Las letras sentenciales '*p*', '*q*', '*r*', '*s*', '*p'*', '*q'*', '*r'*', '*s'*', etc.;

(b) Las letras '*w*', '*x*', '*y*', '*z*', '*w'*' '*x'*', '*y'*', '*z'*', etc., que denotarán ahora individuos y serán llamadas *variables individuales.*

(c) Las letras '*F*', '*G*', '*H*', '*F'*', '*G'*', '*H'*', etc., que denotarán propiedades y serán llamadas *variables predicados;*

* Para facilitar la lectura de (5) y (6), hemos puesto la letra '*G*' entre paréntesis.

(d) Las conectivas '—' y '∨';
(e) Los paréntesis '(' y ')'.

2. *Signos definidos.*

(a) Las conectivas '.', '⊃', '≡', '≢', '↓', y '|';
(b) La letra cuantificacional 'E'.

Las reglas de formación son:

(a) Las letras sentenciales están bien formadas;

(b) El resultado de posponer una serie de variables individuales o de variables predicados a una variable predicado está bien formado;*

(c) El resultado de escribir '( )', en cuyo espacio en blanco se inserta una variable individual o una variable predicado, ante una fórmula bien formada, está bien formado;

(d) El resultado de insertar una fórmula bien formada en el espacio en blanco de '— ' está bien formado;

(e) El resultado de insertar dos fórmulas bien formadas en los espacios en blanco de '(∨)' está bien formado.

No indicamos los axiomas y las reglas de inferencia, porque, como veremos a continuación, esta lógica da lugar a contradicciones. Serán enumerados al presentar la lógica cuantificacional superior como teoría de los tipos en sus dos versiones intensional y extensional.

§ 36. Las paradojas lógicas

La lógica cuantificacional superior posee, pues, una virtud apreciable: es amplia. Posee también un vicio no-

* Aquí también nos tomamos la libertad de poner entre paréntesis la secuencia de argumentos cuando tal secuencia contiene por lo menos una letra predicado.

table: es inconsistente. En el interior de la misma se han descubierto, en efecto, varias contradicciones, a las que se da el nombre de *paradojas lógicas*. La primera fue descubierta (y publicada) por Cesare Burali-Forti en 1897; es la llamada *paradoja del mayor número ordinal*. Según ella, hay un cierto número ordinal que es y no es a la vez el mayor de todos los números ordinales. Esta paradoja era ya conocida por Georg Cantor en 1895. Este mismo autor descubrió en 1899 (pero no publicó) una segunda paradoja, llamada *paradoja del mayor número cardinal*. Según esta paradoja —que es derivable en el interior de la teoría cantoriana de los conjuntos, la cual es una parte de la lógica cuantificacional superior—, hay un cierto número cardinal que es y no es a la vez el mayor de todos los números cardinales. En 1902 Bertrand Russell redescubrió la paradoja cantoriana dentro de la lógica de Frege —que coincide esencialmente con la lógica cuantificacional superior— y la publicó en 1903. Russell presentó, a la vez, una paradoja más básica: la paradoja relativa a las clases, a la cual agregó otras paradojas relativas a propiedades y a relaciones. Prescindiremos aquí de otras paradojas análogas descubiertas por las mismas fechas: la paradoja de Julius König (1905), relativa al menor número ordinal indefinible, y la paradoja de Jules Richard (1905), relativa a números reales definibles e indefinibles. Para mayor simplicidad, nos limitaremos a exponer en forma sumaria las tres paradojas russellianas, relativas a las propiedades, a las clases y a las relaciones.

1. *Paradoja sobre las propiedades.* Por un lado, hay algunas propiedades F de las cuales 'F (F)' es verdadero. Por ejemplo, la propiedad de ser concebible es concebible. Por otro lado, hay algunas propiedades F de las cua-

les '*F (F)*' es falso. Por ejemplo, la propiedad de ser una silla no es una silla. Las propiedades que se aplican a sí mismas son llamadas *propiedades predicables;* las que no se aplican a sí mismas, *propiedades impredicables.* Preguntémonos ahora qué ocurre con la propiedad de ser impredicable. Si ser impredicable es predicable, entonces no se aplica a sí misma y es, por ende, impredicable. Pero si ser impredicable es impredicable, entonces se aplica a sí misma y es, por ende, predicable. La propiedad de ser impredicable es, así, predicable si y sólo si es impredicable, es decir, si y sólo si no es predicable. Se trata de una contradicción palmaria.

2. *Paradoja sobre las clases.* Por un lado, hay algunas clases *A* de las cuales '*A* pertenece a *A*' (o '$A \in A$') es verdadero. Por ejemplo, la clase de todas las clases es una clase y por ende pertenece a sí misma. Por otro lado, hay algunas clases *A* de las cuales '$A \in A$' es falso. Por ejemplo, la clase de todos los hombres no es un hombre y, por lo tanto, no pertenece a sí misma. Formemos ahora la clase de todas las clases que no pertenecen a sí mismas y denotémosla por '*B*'. Se sigue de la definición de '*B*' que:

$$(A)\,(A \in B \equiv -(A \in A))$$

debería ser verdadero; si es así:

$$B \in B \equiv -(B \in B)$$

debería ser también verdadero, en virtud del análogo para las clases de la ley de especificación introducida en § 16. Así, la clase de todas las clases que no pertenecen a sí mismas pertenece a sí misma si y sólo si no pertenece a sí misma. Se trata de una contradicción palmaria.

3. *Paradoja sobre las relaciones.* Supongamos que R sea la relación de todas las relaciones P a todas las relaciones Q tal, que P no relaciona P con Q. Se sigue de la definición de 'R' que:

$$(P)\,(Q)\,(P \text{ relaciona } R \text{ con } Q \equiv -(P \text{ relaciona } P \text{ con } Q))$$

debería ser verdadero; si es así:

$$(Q)\,(R \text{ relaciona } R \text{ con } Q \equiv -(R \text{ relaciona } R \text{ con } Q))$$

debería ser también verdadero, en virtud del análogo para las relaciones de la ley de especificación introducida en § 16. Se trata de una contradicción palmaria.

§ 37. Soluciones a las paradojas lógicas

Para eliminar tales paradojas se han propuesto varios expedientes. Pueden distribuirse en dos grupos.

Grupo 1. Las teorías de los tipos. La primera fue propuesta en 1908 por Bertrand Russell y fue incorporada a los *Principia Mathematica* (1910-13). Consistía en una teoría simple de los tipos a la cual se superponía una teoría ramificada. Leon Chwistek, en 1921, y F. P. Ramsey, en 1926, mostraron que la teoría simple de los tipos resultaba suficiente. Por otro lado, Norbert Wiener en 1914 y Kazimierz Kuratowski en 1921 mostraron que los predicados poliádicos pueden ser definidos en términos de predicados monádicos. Con ello fue posible presentar la teoría en una forma simplificada. Es la que servirá de base en la exposición que se ofrece de ella en las secciones siguientes. Dos versiones serán presentadas: la versión in-

tensional —fundada en el dualismo entre propiedades monádicas y clases— y la versión extensional —donde se abandonará tal dualismo y se acogerán solamente clases.

Grupo 2. Las teorías axiomáticas de los conjuntos. La primera de ellas fue propuesta por Ernst Zermelo en 1908. Desde entonces se han propuesto otras teorías axiomáticas de los conjuntos. J. von Neumann presentó en 1926 un sistema que fue refinado y reelaborado por Paul Bernays en 1937. W. van Quine presentó en 1937 una teoría que toma un camino medio entre Russell y Zermelo. El mismo Quine presentó en 1940 otra teoría que toma un camino medio entre Russell y von Neumann. J. B. Rosser mostró que uno de los axiomas de Quine en esta última teoría conducía a contradicción. Esta contradicción fue eliminada por Hao Wang. Una nueva presentación de la teoría con la corrección introducida por Wang fue publicada por Quine en 1951.

En el presente volumen nos limitaremos a exponer la teoría de los tipos en las dos versiones antes indicadas. La exposición de las teorías de los conjuntos presentaría dificultades que no encajarían en el nivel elemental hasta ahora adoptado; consideramos más pertinente, pues, prescindir de ellas. Digamos sólo a guisa de información que en las teorías de los conjuntos se suprimen de las variables todos los signos sobrescriptos* que se usarán en la teoría de los tipos y, por lo tanto, que las paradojas lógicas deben eliminarse en aquellas teorías de manera distinta que en la teoría de los tipos.

En la exposición de la teoría de los tipos por Russell y en parte de la literatura lógica, las paradojas lógicas pre-

* Llamamos aquí *signos sobrescriptos* a los que figuran a la derecha y a un nivel tipográfico más alto que un signo dado. Un exponente es, por ejemplo, un signo sobrescripto.

sentadas en la sección anterior son equiparadas a las paradojas metalógicas. Tanto la teoría simple de los tipos de Chwistek y Ramsey como las teorías axiomáticas de los conjuntos exigen, en cambio, la distinción entre paradojas lógicas y paradojas metalógicas. En las próximas dos secciones de este capítulo nos referiremos sólo a las paradojas lógicas; las metalógicas serán brevemente tratadas en la sección final.

§ 38. Teoría intensional de los tipos

En vez de considerar los individuos, o valores de '*w*', '*x*', '*y*', '*z*', etc., y las propiedades, o valores de '*F*', '*G*', '*H*', etc., como formando un solo universo del discurso, la teoría de los tipos de Russell procede a distribuir tales valores en un número infinito de universos del discurso o tipos. El tipo inferior o tipo 0 es el tipo de todos los individuos, el próximo tipo en la serie ascendente o tipo 1 es el tipo de todas las propiedades de individuos, el próximo tipo en la misma serie o tipo 2 es el tipo de todas las propiedades de propiedades de individuos, y así sucesivamente.

Por ejemplo:

Hermann Hesse, que es un individuo, pertenece al tipo 0.

Ser ganador del premio Nobel, que es una propiedad de individuos, pertenece al tipo 1.

Ser una distinción, que es una propiedad de propiedad de individuos, pertenece al tipo 2,

y así sucesivamente.

Los tipos anteriores forman una jerarquía de tipos semánticos. Podemos establecer una jerarquía de tipos sin-

tácticos. Para ello se sustituyen las variables 'w', 'x', 'y', 'z', etc., por las variables:

'w^0', 'x^0', 'y^0', 'z^0', etc., llamadas *variables de tipo sintáctico 0;*

y las variables 'F', 'G', 'H', etc., por las series de variables:

'F^1', 'G^1', 'H^1', etc., llamadas *variables de tipo sintáctico 1;*

'F^2', 'G^2', 'H^2', etc., llamadas *variables de tipo sintáctico* 2, y, en general:

'F^n', 'G^n', 'H^n', etc., llamadas *variables de tipo sintáctico n.*

La regla de formación (b) de fórmulas bien formadas en la lógica cuantificacional superior presentada en § 32 podrá ser ahora modificada de la siguiente manera:

(b) El resultado de posponer una variable individual o una variable predicado de tipo sintáctico n a una variable predicado de tipo sintáctico $n + 1$ está bien formado.

En virtud de esta regla, una entidad sólo puede tener propiedades de tipo superior próximo. Si la entidad es de tipo n, la propiedad deberá ser de tipo $n + 1$; si la entidad es de tipo $n + 1$, la propiedad deberá ser de tipo $n + 2$, y así sucesivamente. Como la paradoja russelliana sobre las propiedades surgió por haberse atribuido una propiedad, la propiedad de ser impredicable, a sí misma, resultará ahora que la fórmula 'Lo impredicable es impredicable' no estará bien formada. Por lo tanto, la primera contradicción de Russell no puede derivarse dentro de la lógica cuantificacional superior monádica una vez revisada en la forma indicada. El expediente de Russell consiste, pues, en introducir una restricción en las reglas de formación de las fórmulas bien formadas de la lógica cuantificacional superior y en eliminar como carentes de sentido o mal

formadas todas las fórmulas construidas en contravención con las nuevas reglas de formación.

De haberse introducido notaciones apropiadas para designar clases y relaciones, se habría podido mostrar que, lo mismo que la paradoja sobre las propiedades, las paradojas sobre las clases y las relaciones no son ya derivables en la lógica cuantificacional superior modificada en la forma antedicha. Nos referiremos más específicamente a estas dos últimas paradojas al final de nuestra exposición de la teoría extensional de los tipos.

La teoría intensional de los tipos puede erigirse como un cálculo. A este efecto se adoptan como signos primitivos los mismos indicados en § 35 con las siguientes modificaciones:

(b) Las variables individuales serán ahora 'w^0', 'x^0', 'y^0', 'z^0', 'w'^0', 'x'^0', 'y'^0', 'z'^0', etc.;

(c) Las variables predicados serán ahora la siguiente serie de variables para cada n desde 1 en adelante: 'F^n', 'G^n', 'H^n', 'F'^n', 'G'^n', 'H'^n', etc.

Los signos definidos serán los mismos indicados en § 35. En cuanto a las reglas de formación, se conservarán (a), (c), (d), (e) y se modificará (b) del modo indicado en la página 169.

Como axiomas pueden elegirse A1-A4 (cf. § 11) más:

A5a : $(x^0)\, F^1\, x^0 \supset F^1\, y^0$,
A5b : $(G^n)\, F^{n+1}\, (G^n) \supset F^{n+1}\, (H^n)$,*
A6a : $(x^0)\, (p \supset F^1\, x^0) \supset (p \supset (x^0)\, F^1\, x^0)$,
A6b : $(G^n)\, (p \supset F^{n+1}\, (G^n)) \supset (p \supset (G^n)\, F^{n+1}\, (G^n))$.

Las reglas de inferencia serán las de separación, uni-

* Cf. nota al pie de la p. 163.

versalización, reescritura de variables ligadas y sustitución ya mencionadas.

El cálculo cuantificacional monádico superior puede dividirse en un número infinito de subcálculos. El primero de ellos es el cálculo sentencial; todos los signos primitivos, reglas de formación, axiomas y reglas de inferencia de este cálculo están incluídos en los signos primitivos, reglas de formación y reglas de inferencia del cálculo cuantificacional monádico superior. El segundo de tales cálculos es el cálculo cuantificacional monádico elemental; cuando las letras 'w', 'x', 'y', 'z', 'F', 'G', 'H' de este cálculo son sustituidas por 'w^0', 'x^0', 'y^0', 'z^0', 'F^1', 'G^1', 'H^1', todos los signos primitivos, reglas de formación, axiomas y reglas de inferencia del cálculo cuantificacional monádico elemental están incluidos entre los signos primitivos, reglas de formación, axiomas y reglas de inferencia del cálculo cuantificacional monádico superior.

Considerado como parte del cálculo cuantificacional monádico superior, el cálculo cuantificacional monádico elemental es llamado generalmente *cálculo cuantificacional monádico de primer orden.* Sobre él pueden construirse un número infinito de cálculos cuantificacionales monádicos, los cuales reciben los nombres de *cálculo cuantificacional monádico de segundo orden, de tercer orden, etc.* Cada uno de los cálculos tiene un número de orden y cada uno puede ser erigido como un cálculo separado, con signos primitivos propios y reglas de formación propias.

§ 39. Teoría extensional de los tipos

Según apuntamos, la teoría de los tipos expuesta anteriormente está fundada en el dualismo entre propiedades

monádicas y clases; la llamamos por ello *teoría intensional.* Puede exponerse otra versión de la teoría en la cual las propiedades son consideradas extensionalmente, es decir, se comportan como clases: es la *teoría extensional.*

Desde el punto de vista intensional, dos propiedades de tipo n pueden ser diferentes aun cuando participen de ellas las mismas entidades de tipo $n-1$. Desde el punto de vista extensional, dos propiedades de tipo n son idénticas si participan de ellas las mismas entidades de tipo $n-1$. Como, por otro lado, dos clases son consideradas idénticas si tienen los mismos miembros, se ha convenido en identificar las propiedades extensionales con las clases. Finalmente, como las clases o propiedades extensionales son más manejables que las propiedades intensionales, se puede prescindir de éstas y presentar una teoría de los tipos fundada en la jerarquía ascendente:

Individuos,
Clases de individuos,
Clases de clases de individuos,
etc.

Las diferencias principales entre esta teoría de los tipos y la teoría intensional son las siguientes:

1. Los signos 'F^n', 'G^n', 'H^n' denotarán ahora propiedades extensionales, es decir, clases;

2. A los axiomas A1-A6b se agregarán ahora los dos siguientes, llamados *axiomas de extensionalidad:*

$$\text{A7a}: (F^1)(G^1)((x^0)(F^1 x^0 \equiv G^1 x^0) \supset F^1 = G^1),$$

$$\text{A7b}: (F^{n+1})(G^{n+1})((H^n)(F^{n+1}(H^n) \equiv G^{n+1}(H^n)) \supset F^{n+1} = G^{n+1}),$$

en donde '$F^{n+1} = G^{n+1}$' es una abreviatura de '$(H^{n+1})(H^{n+1}(F^n) \equiv H^{n+1}(G^n))$'*.

Como se ve por dichos axiomas, si dos propiedades dadas lo son de los mismos individuos, tales propiedades son idénticas y, por consiguiente, son propiedades extensionales, es decir, clases.

La teoría extensional puede simplificarse aún más. En efecto, en vez de designar las propiedades extensionales o clases mediante las letras 'F^n', 'G^n', 'H^n' y de emplear la fórmula '$G^{n+1}(F^n)$' para indicar que una entidad F^n pertenece a la propiedad extensional o clase G^{n+1}, se pueden designar las clases mediante nuevas letras 'w^n', 'x^n', 'y^n' y 'z^n' (donde $n > 0$), y emplear la fórmula '$w^n \circ x^{n+1}$' con el fin de indicar que una entidad w^n pertenece a la clase x^{n+1}.

La teoría de los tipos resultante puede ser formalizada en el interior de la lógica cuantificacional elemental del siguiente modo:

Se adoptarán como signos primitivos las letras sentenciales, letras predicados,** conectivas y paréntesis enumerados en § 18 respectivamente bajo (a), (b), (d) y (e). El resto de los signos primitivos serán:

(c) Una serie de variables argumentos para cada n desde 0 en adelante: 'w^0', 'x^0', 'y^0', 'z^0', 'w^1', 'x^1', 'y^1', 'z^1', etc.;

(f) La constante predicado 'ε'.

Las reglas de formación serán las mismas que las in-

* Este bicondicional puede ser considerado como la expresión rigurosa del *principio de Leibniz* mencionado en § 21; permite ver, en efecto, que dos entidades son idénticas si tienen las mismas propiedades extensionales, es decir, si pertenecen a las mismas clases.

** Las letras 'F' 'G', 'H' no designan aquí ya propiedades extensionales o clases, sino que, como en el capítulo III, sirven únicamente de sustitutos para constantes predicados.

dicadas para la lógica cuantificacional elemental, más la siguiente:

(f) El resultado de insertar una variable argumento de tipo n en el primer espacio en blanco de '(ε)' y una variable argumento de tipo $n+1$ en el segundo espacio en blanco de '(ε)' está bien formado.

Para los axiomas, se adoptarán A1-A4 más los siguientes:

$$\text{A5}' : (x^n)\ Fx^n \supset Fy^n,$$
$$\text{A6}' : (x^n)\ (p \supset Fx^n) \supset (p \supset (x^n)\ Fx^n),$$
$$\text{A7}' : (x^n)\ (y^n)\ ((z^{n-1})\ (z^{n-1} \in x^n \equiv z^{n-1} \in y^n) \equiv x^n = y^n),$$

donde '$x^n = y^n$' es una abreviatura de '$(z^{n+1})\ (x^n \in z^{n+1} \equiv y^n \in z^{n+1})$',

$$\text{A8}' : (Ey^n)\ (x^{n-1})\ (x^{n-1} \in y^n \equiv Fx^{n-1}),$$

si 'y^n' no es libre en 'Fx^{n-1}'.

A8' es llamado *axioma de existencia de clases*. Según el mismo, dada una fórmula bien formada 'Fx^{n-1}', hay una clase y^n cuyos miembros son las entidades y sólo las entidades de tipo $n-1$ que satisfacen dicha fórmula bien formada.

La paradoja russelliana sobre las clases no es derivable dentro de la presente teoría extensional de los tipos. Tal paradoja surgió por haberse formulado '$\neg(x \in x)$', donde '$\in$' está flanqueada por nombres de clases del mismo tipo. Semejante fórmula no está ahora bien formada y queda fuera del cálculo.

Tampoco es derivable la paradoja russelliana sobre las relaciones. Podríamos, en efecto, definir las relaciones en

términos de clases, de modo que la paradoja correspondiente resultara inderivable.

Todo el material tratado en los capítulos IV, V y VI puede insertarse dentro del marco de la teoría extensional de los tipos. Sólo por motivos pedagógicos hemos considerado plausible ofrecer dicho material antes de la presentación de la lógica cuantificacional superior.

§ 40. Las paradojas metalógicas

Las paradojas metalógicas a que nos hemos referido en § 37 son llamadas también *paradojas semánticas*. Surgen, en efecto, cuando la semántica a la cual aludíamos en § 3 y que expondremos más circunstanciadamente en § 44 se construye sin introducir restricciones en sus reglas. Así como la lógica cuantificacional superior en su primera versión ingenua era inconsistente, la semántica en su primera versión ingenua es inconsistente. Prueba de ello son las paradojas de que aquí trataremos.

La Antigüedad conocía ya varias paradojas semánticas. Algunas fueron enumeradas durante la Edad Media en los tratados llamados *De insolubili* y *De impossibilibus*. La más famosa es la llamada *Epiménides* o *El Cretense*, de que se habla en casi todos los libros de lógica. Aquí presentaremos tres paradojas: dos sobre la verdad y una sobre la denotación.

Paradojas sobre la verdad.

(A). X dice 'Miento'. La consecuencia de ello es:

1. Si X miente cuando dice que miente, X dice la verdad.

2. Si X dice la verdad cuando dice que miente, X miente.

Por lo tanto, X dice la verdad si y sólo si X miente, lo cual es una contradicción palmaria.

Presentemos ahora esta paradoja de un modo más formal: Dado nuestro modo de entender la expresión 'es verdadero', resulta que para un enunciado cualquiera 'S':

'S' es verdadero $\equiv$ S* (1),

lo cual puede tener como ejemplo el bicondicional:

'La nieve es blanca' si y sólo si la nieve es blanca.

Tomemos ahora el enunciado "S_1' es falso' y abreviémoslo por 'S_1'. Se sigue de (1) que:

'S_1' es verdadero $\equiv S_1$ (2).

Ahora bien, si sustituimos a la derecha de ' $\equiv$ ' en (2) 'S_1' por el enunciado del cual es una abreviatura, es decir, 'S_1' es falso', tendremos que:

'S_1' es verdadero $\equiv$ 'S_1' es falso,

lo cual es una contradicción palmaria.

(B) En un lado de una tarjeta aparece el enunciado:

En el otro lado de esta tarjeta hay un enunciado verdadero (3).

* Este bicondicional está en la base de la célebre definición dada por Tarski del concepto semántico de verdad.

Damos la vuelta a la tarjeta y sobre su otro lado aparece el enunciado:

> En el otro lado de esta tarjeta hay un enunciado falso (4).

En consecuencia de ello tenemos:

1. Si (3) es verdadero, (4) debe ser verdadero y, por lo tanto, (3) debe ser falso.

2. Si (3) es falso, (4) debe ser falso y, por lo tanto, (3) debe ser verdadero.

Resumiendo:

1. (3) es verdadero si y sólo si (3) es falso.

2. (3) es verdadero si y sólo si (3) no es verdadero.

La formulación anterior de la paradoja se debe a P. E. B. Jourdain (1913).

Paradoja sobre la denotación.

Algunas locuciones se denotan a sí mismas. Por ejemplo, 'escrito en español' está escrito en español; 'compuesto de consonantes y vocales' está compuesto de consonantes y vocales. Llamaremos a estas locuciones *autológicas*. Otras locuciones no se denotan a sí mismas. Por ejemplo, 'escrito en francés' no está escrito en francés; 'compuesto de cifras' no está compuesto de cifras. Llamaremos a estas locuciones *heterológicas*. Preguntémonos ahora si la locución 'heterológico' es heterológica o autológica. El resultado es:

1. Si 'heterológico' es heterológico, se denota a sí mismo, y por lo tanto, es autológico.

2. Si 'heterológico' es autológico, no se denota a sí mismo y, por lo tanto, es heterológico.

Resumiendo:

1. 'Heterológico' es heterológico si y sólo si es autológico.

2. 'Heterológico' es heterológico si y sólo si no es heterológico.

La paradoja anterior fue propuesta por Leonhard Nelson y Kurt Grelling (1907-08). No debe confundirse con la paradoja russelliana sobre la impredicabilidad, pues mientras ésta se refiere a propiedades, la de Nelson y Grelling se refiere a nombre de propiedades.

Para eliminar estas paradojas se puede emplear la llamada *teoría de la jerarquía de lenguajes* propuesta por Russell en 1922 y desarrollada, entre otros, por Tarski (1933) y Carnap (1942). Esta solución ha sido bosquejada en § 2 al tratar de la distinción entre uso y mención. Consiste esencialmente en:

1. Distinguir entre un lenguaje dado L_n, su metalenguaje L_{n+1}, el metalenguaje de este metalenguaje L_{n+2}, etc.

2. Sustituir los predicados semánticos 'es verdadero', 'es falso', etc. en cada metalenguaje L_{n+1} (donde $n > 0$) por los predicados 'es verdadero en L_n', 'es falso en L_n', etc.

Por ejemplo, para expresar que el enunciado 'Todo es relativo' es verdadero cuando el enunciado en cuestión pertenece al lenguaje L_0, escribiremos:

'Todo es relativo' es verdadero en L_0 (5).

Como 'Todo es relativo' pertenece al lenguaje L_0, (5), donde se afirma que el enunciado del lenguaje L_0: 'Todo es relativo', es verdadero, pertenecerá él mismo al lenguaje L_1, y si queremos afirmar a su vez que (5) es verdadero, escribiremos:

'Todo es relativo' es verdadero en L_ω' es verdadero en L_1 (6).

Así como (5) pertenecía al lenguaje L_1, (6) pertenecerá al lenguaje L_2.

Con ayuda de este método podemos eliminar fácilmente cualquiera de las paradojas metalógicas presentadas. Tomemos como ejemplo la paradoja (A) sobre la verdad. (1) deberá escribirse ahora:

'S' es verdadero en $L_n \equiv S$ (7),

y todo enunciado que sustituya a 'S' deberá pertenecer al lenguaje L_n en cuestión. La contradicción resultaba de dos operaciones:

1. La abreviatura de "S_1' es falso' por 'S_1'.
2. La sustitución en (2) de 'S_1' por "S_1' es falso'.

Ambas operaciones quedan ahora prohibidas. El enunciado "S_1' es falso' debe dilatarse en 'S_1' es falso en L_n', el cual pertenece al lenguaje L_{n+1}. No puede, pues, abreviarse por 'S_1' (pues el enunciado 'S_1' mismo pertenece al lenguaje L_n), y no puede sustituirse mediante 'S_1' en el siguiente ejemplo de (7):

'S_1' es verdadero en $L_n \equiv S_1$.

VIII. METALÓGICA

§ 41. Sintaxis

Cuando se estudia un determinado sistema de signos o lenguaje desde el punto de vista sintáctico, se le despoja temporalmente de toda significación y se le trata, por lo tanto, como un *cálculo abstracto*. Como se ha mostrado en § 11, lo primero que hay que hacer al analizar un cálculo C es definir lo que será considerado como *signo primitivo de C*. Esto puede efectuarse enumerando todos los signos primitivos del cálculo en cuestión. Por ejemplo, la locución '*x* es un signo primitivo del cálculo sentencial' puede definirse como sigue:

x es o una de las cuatro letras '*p*', '*q*', '*r*', y '*s*', o el acento '′', o una de las conectivas '—' y '∨', o uno de los dos paréntesis '(' y ')'.

Por lo usual, se requiere que la definición sea efectiva con el fin de que pueda responderse a la pregunta: "¿Es *x* un signo primitivo de C?" de un modo puramente mecánico. La definición anterior de la locución '*x* es un signo primitivo del cálculo sentencial' es, por ejemplo, efectiva.

Lo segundo que hay que hacer es definir lo que será considerado como una *expresión* o *fórmula de C*. Esto se hace usualmente del siguiente modo:

x es una fórmula de C = def. *x* es una secuencia finita de signos de C.

La definición resultante es también efectiva.

Lo tercero que hay que hacer es definir lo que será considerado como una *expresión bien formada* o *fórmula bien formada de C*. La clase de fórmulas bien formadas de un cálculo dado C se define habitualmente de tal modo que coincida con la clase de fórmulas que se declaren sig-

nificantes una vez asignada a C una interpretación dada. La definición es con frecuencia recursiva; declara primero que una serie básica de fórmulas están bien formadas y señala luego que otra serie de fórmulas están bien formadas si sus componentes están a su vez bien formados. Por ejemplo, la locución 'x es una fórmula bien formada del cálculo sentencial' puede ser definida en este cálculo como sigue:

1. x está bien formada cuando x es una de las cuatro letras 'p', 'q', 'r' y 's' seguida por una serie n (donde $n \geqslant 0$) de acentos;
2. x está bien formada si x es el resultado de insertar fórmulas bien formadas en los espacios en blanco de '$\ _\ $' y '$(\ \vee\ )$'.

Es de esperar asimismo que la definición sea efectiva. Ahora bien, la anterior definición de la locución 'x es una fórmula bien formada del cálculo sentencial' es efectiva.

Lo que hay que hacer tras ello es aislar de la clase de fórmulas bien formadas de C una subclase: la subclase de *teoremas de C*. La clase de teoremas de un cálculo dado C se define usualmente de tal modo que coincida con la clase de fórmulas que se declaren verdaderas o válidas una vez se asigne a C una interpretación dada*. Para definir el concepto de teorema se requieren algunos conceptos auxiliares: el concepto de *axioma*, el de *regla de inferencia* y el de *prueba*. Las dos locuciones 'x es un axioma de C' y 'x es una regla de inferencia de C' se definen usualmente mediante enumeración. Por ejemplo, la locución 'x es un axioma del cálculo sentencial' puede ser definida del siguiente modo:

* Las fórmulas en cuestión serán verdaderas si, como '$(x)(x = x)$', son enunciados; válidas si, como '$p \supset p$', son esquemas.

x es una de las fórmulas bien formadas

$$'(p \vee p) \supset p,\ p \supset (p \vee q),\ (p \vee q) \supset (q \vee p),\ (p \supset q) \supset ((r \vee p) \supset (r \vee q))'.$$

La locución 'x es una prueba en C' puede ser definida como sigue:

x es una secuencia de fórmulas bien formadas cada una de las cuales es un axioma de C o se sigue de uno o más miembros previos de dicha secuencia mediante aplicación de una regla de inferencia de C.

Se espera asimismo que todas las definiciones sean efectivas, de modo que las preguntas: "¿Es x un axioma de C?", "¿Es x una regla de inferencia de C?" y "¿Es x una prueba en C?" puedan ser contestadas de un modo mecánico.

Con estas locuciones a nuestra disposición, la locución 'x es un teorema de C' puede, finalmente, ser definida así:

x es la última fórmula bien formada de una prueba en C.

Por medio de esta definición se declara que una fórmula bien formada de un cálculo dado C es un teorema de C si y sólo si puede proporcionarse una prueba de tal fórmula en C.

En relación con la locución 'x es un teorema de C' hallamos nuestros principales conceptos sintácticos. Diremos a guisa de ensayo que:

1. Un cálculo C es *consistente* si no hay ninguna fórmula bien formada de C tal, que tanto ella como su negación sean teoremas de C;

2. Un cálculo C es *completo* si, dada cualquier fórmula bien formada de C, o ella o su negación es un teorema o un axioma de C;

3. Un cálculo C es *decidible* si hay un proceso mecánico para decidir si cualquier fórmula bien formada de C es o no un teorema de C.

Alcanzamos las dos primeras definiciones como sigue. Supongamos que C esté construido y sea interpretado de tal modo, que toda fórmula bien formada de C se convierta en un enunciado. Entonces toda fórmula bien formada de C, una vez interpretada, será verdadera o falsa; verdadera si su negación es falsa, y falsa si su negación es verdadera. Esperamos que la clase de teoremas de C coincida con la clase de fórmulas que sean declaradas verdaderas una vez interpretado C, y que la clase de no teoremas de C coincida con la clase de fórmulas que sean declaradas falsas una vez interpretado C. El lector habrá ya barruntado que si un cálculo C es inconsistente e incluye, por lo tanto, entre sus teoremas la negación de cualquiera de sus teoremas, C incluirá entre sus teoremas por lo menos un enunciado falso. Así, cuando C es inconsistente, los axiomas, reglas de inferencia y pruebas de un cálculo dado C no permiten distribuir en dos clases mutuamente exclusivas los enunciados verdaderos y los enunciados falsos de C.

Podemos mostrar, además, respecto a muchos cálculos C, que si C es inconsistente, toda fórmula bien formada de C aparecerá como un teorema y, por ende, que la clase de teoremas de C coincide simplemente con la clase de enunciados de C. Tal ocurre con todos los cálculos en los cuales la fórmula:

$$(p \,.\, -p) \supset q,$$

o el análogo de ella, es susceptible de prueba como un teorema. En tales cálculos, nuestra definición de la locución: 'C es consistente' puede ser sustituida por la equivalente:

Hay por lo menos una fórmula bien formada de C que no es un teorema de C.

Nuestra definición de completitud* es motivada de un modo similar. Como toda fórmula bien formada de C se convertirá en un enunciado una vez interpretado C y, por ende, será verdadera o falsa, toda fórmula bien formada o la negación de la misma deberá ser susceptible de prueba como un teorema de C. La fórmula bien formada deberá ser susceptible de prueba si es verdadera; su negación, en cambio, deberá ser susceptible de prueba si la fórmula bien formada es falsa, por cuanto entonces su negación es verdadera.

Por desgracia, nuestra definición de completitud es demasiado estricta para cálculos que incluyen esquemas (posiblemente junto con enunciados) entre sus fórmulas bien formadas. En rigor, un esquema puede ser válido, indeterminado o contra-válido. Si, por un lado, un esquema es válido o contra-válido, el esquema mismo o su negación son admisibles como un teorema. Si, por otro lado, un esquema es indeterminado, su negación es también indeterminada y, por ende, ni el esquema ni su negación son admitidos como teoremas. Por consiguiente, debemos dar una definición menos estricta de la completitud.

Podemos conseguir otro *definiens* del siguiente modo. Hay muchos cálculos C —por ejemplo, el cálculo sentencial— que siguen siendo consistentes siempre que se seleccionen como axiomas de C fórmulas válidas de C, pero que se vuelven inconsistentes tan pronto como se seleccionan como axiomas de C fórmulas indeterminadas o contra-válidas de C. Así, podemos definir la locución 'C es completo' como sigue:

C′ es inconsistente cuando C′ es exactamente igual a C

* El neologismo 'completitud' es usado para conservar el paralelismo lingüístico con los demás sustantivos: 'consistencia', 'decidibilidad' e 'independencia'.

excepto por contener como axioma adicional cualquier fórmula no susceptible de prueba de C.

Desgraciadamente, algunos cálculos —como, por ejemplo, el cálculo cuantificacional elemental— incluyen entre sus teoremas todas las fórmulas válidas de C; por lo tanto, son intuitivamente completos y, con todo, siguen siendo consistentes después que se han agregado a los axiomas de C ciertas fórmulas indeterminadas de C. En tales cálculos, el único *definiens* utilizable para la locución 'C es completo' debe ser:

Todas las fórmulas bien formadas válidas de C son teoremas.

Pero usualmente se dice que una fórmula es válida si todos sus ejemplos son verdaderos. De ahí que el concepto usual de validez es lo que podemos llamar un *concepto semántico*. Pero si el concepto de completitud debe seguir siendo puramente sintáctico, habrá que forjar una definición sintáctica de validez. No emprenderemos aquí esta tarea.

Acordamos antes llamar *decidible* a un cálculo dado C si existe un método efectivo para decidir si cualquier fórmula bien formada de C es o no un teorema de C. Observemos que si tenemos una prueba de una fórmula dada, poseemos una evidencia efectiva de que la fórmula en cuestión es un teorema. Pero si no tenemos aún ninguna prueba de una fórmula dada, no poseemos todavía ninguna evidencia efectiva de que la fórmula en cuestión no es un teorema. Puede ocurrir simplemente que no hayamos descubierto una prueba que *podríamos* haber descubierto. Por consiguiente, sería interesante discurrir para todo cálculo C un criterio mecánico que nos indicara si cualquier fórmula bien formada de C es o no susceptible de prueba. Si existe un procedimiento de examen

a tal efecto y la fórmula lo pasa con éxito, sabremos que puede hallarse una prueba para ella tanto si esta prueba ha sido como si no ha sido ya descubierta. Si la fórmula fracasa en el examen, sabremos que no puede jamás encontrarse ninguna prueba para ella y, por ende, que no debemos buscar tal prueba.

Tomemos como ejemplo la famosa conjetura de Fermat:

La ecuación '$x^n + y^n = z^n$' no tiene solución para enteros positivos x, y, z, n, donde $n > 2$.

Se han emprendido incontables ensayos para probar esta conjetura en la teoría numérica. Por desgracia, no poseemos ningún procedimiento de decisión para tal teoría y, por lo tanto, no podemos decir, aun antes de aventurarnos en una prueba de la conjetura de Fermat, si es susceptible de prueba dentro de la teoría numérica.

Durante la tercera década de este siglo se solucionaron, uno tras otro, diversos problemas de decisión. Por ejemplo, se mostró que el cálculo sentencial y el cálculo cuantificacional monádico elemental eran decidibles. Por tal motivo, los lógicos y los matemáticos alentaron la esperanza de que toda la lógica y, de consiguiente, toda la matemática serían un día decidibles, de que el sueño leibniziano de una máquina pensante sería alguna vez realizado. Sin embargo, esta esperanza se desvaneció en 1934, cuando Alonzo Church demostró que no podía fraguarse ningún procedimiento de decisión ni siquiera para un fragmento de la lógica tan simple como el cálculo cuantificacional elemental.

Un último concepto con el cual solemos topar en sintaxis es el concepto de *independencia*. Este concepto se

aplica a los axiomas y a las reglas de inferencia de un cálculo C. Diremos que un axioma A de un cálculo dado C es independiente si A no es susceptible de prueba en C', donde C' tiene las mismas reglas de inferencia que C y los mismos axiomas que C excepto A. Diremos que una regla de inferencia R de un cálculo dado C es independiente si por lo menos un teorema de C no es susceptible de prueba en C', donde C' tiene los mismos axiomas que C y las mismas reglas de inferencia que C excepto R.

§ 42. Algunos resultados en sintaxis

Enumeraremos aquí sin prueba algunos de los resultados alcanzados en la sintaxis de la lógica en el curso de los últimos treinta años.

(a) *El cálculo sentencial.* El lógico norteamericano E. L. Post mostró en 1921 que la versión dada por Whitehead-Russell del cálculo sentencial es consistente, completa y decidible. La versión en cuestión consiste en cinco axiomas:

$$\text{A1} : (p \vee q) \supset p,$$
$$\text{A2} : q \supset (p \vee q),$$
$$\text{A3} : (p \vee q) \supset (q \vee p),$$
$$\text{A4} : (p \vee (q \vee r)) \supset (q \vee (p \vee r)),$$
$$\text{A5} : (q \supset r) \supset ((p \vee q) \supset (p \vee r))$$

y dos reglas de inferencia: separación y sustitución*.

* Aunque usada a lo largo de *Principia Mathematica*, la regla de sustitución no aparece allí enumerada como una regla de inferencia.

El procedimiento de decisión ingeniado por Post es el procedimiento familiar de las tablas de verdad expuesto en § 8. Post mostró que una fórmula bien formada del cálculo sentencial de Whitehead-Russell es probable si y sólo si es una tautología. Empleando este resultado como su lema principal, Post logró mostrar que el cálculo sentencial de Whitehead-Russell es consistente. Obsérvese, en efecto, que si una fórmula bien formada dada del cálculo es susceptible de prueba y, por ende, es tautológica, su negación es contradictoria y, por lo tanto, no es susceptible de prueba. Post logró mostrar también que si cualquier fórmula no susceptible de prueba (es decir, cualquier fórmula indeterminada o contradictoria) es agregada a A1-A5 como un axioma ulterior, el cálculo resultante se hace inconsistente. El cálculo sentencial de Whitehead-Russell es, por lo tanto, completo.

P. Bernays mostró en 1926 que A4 puede ser derivado de A1-A3 y A5 solos, pero que cada uno de los axiomas restantes y cada una de las dos reglas de inferencia, separación y sustitución, son independientes.

Desde entonces se han propuesto varios conjuntos de axiomas y reglas de inferencia, todos los cuales dan lugar a un cálculo sentencial consistente, completo y decidible. El más económico de tales conjuntos es el de Jean Nicod; consiste en un solo axioma y dos reglas de inferencia. Se han fraguado otros procedimientos de decisión para el cálculo sentencial, como, por ejemplo, el procedimiento de Hilbert-Ackermann, basado en la reducción de todas las fórmulas bien formadas a las llamadas *formas normales*.

(b) *El cálculo cuantificacional elemental.* David Hilbert y Wilhelm Ackermann mostraron en 1928 que la versión dada por Whitehead-Russell del cálculo cuantificacio-

nal elemental es consistente. La versión en cuestión consiste en A1-A5, más los dos axiomas cuantificacionales:

$$A6 : (x)\,Fx \supset Fy,$$
$$A7 : (x)\,(p \vee Fx) \supset (p \vee (x)\,Fx),$$

y cuatro reglas de inferencia: separación, universalización, reescritura de variables ligadas y sustitución*.

El lógico austriaco Kurt Gödel mostró en 1930 que la versión dada por Whitehead-Russell del cálculo cuantificacional elemental es completa en el sentido de que una fórmula bien formada de tal cálculo es susceptible de prueba si y sólo si es válida. Se sabía ya que el cálculo cuantificacional elemental no puede ser completo en el sentido más estricto; en efecto, puede ser completado por un axioma ulterior tal como la fórmula indeterminada:

$$(Ex)\,Fx \supset (x)\,Fx,$$

sin por ello llegar a ser inconsistente.

Como se observó antes, Church probó en 1934 que el cálculo cuantificacional elemental es indecidible. Sin embargo, algunos segmentos de él son decidibles. Entre los más antiguos procedimientos de decisión para el cálculo cuantificacional monádico elemental podemos mencionar los diagramas de Venn.

Se sabe que los axiomas y reglas de inferencia de la versión dada por Whitehead-Russell del cálculo cuantificacional elemental son independientes.

Recientemente se han propuesto algunos conjuntos de axiomas y reglas de inferencia, todos los cuales dan lugar

* Una vez más, algunas de estas reglas están meramente implícitas en *Principia Mathematica*.

a un cálculo cuantificacional elemental consistente y completo (pero indecidible). Uno de los conjuntos más económicos, inspirado por J. von Neumann, usa la separación como su única regla de inferencia.

(c) *El cálculo cuantificacional superior.* Hemos mostrado en el capítulo anterior que toda formulación ingenua del cálculo cuantificacional superior está condenada a la inconsistencia. Según se ha visto, una versión del cálculo cuantificacional superior fue ofrecida por A. N. Whitehead y Bertrand Russell en sus *Principia Mathematica.* Tal cálculo englobaba la llamada *teoría ramificada de los tipos.* Posteriormente se propuso una versión simplificada de dicha teoría; sus elementos esenciales pueden hallarse en los *Grundzüge der theoretischen Logik,* de Hilbert y Ackermann. El cálculo resultante es suficientemente amplio para alojar en su interior la matemática clásica. Inútiles ensayos fueron emprendidos para probar su consistencia y completitud hasta que en 1933 Gödel probó que la teoría numérica elemental y cualquier lógica suficientemente rica para dar lugar a la teoría numérica elemental son o inconsistentes o incompletas. Para mostrarlo, Gödel construyó una fórmula de la teoría numérica elemental y, por ende, del cálculo cuantificacional superior, que es susceptible de prueba si y sólo si es falsa; la fórmula en cuestión es usualmente llamada una *fórmula indecidible.* Varios ensayos, hasta ahora fracasados, han sido emprendidos para construir una lógica y, por lo tanto, una teoría numérica elemental que pudiera escapar a la suerte de la lógica cuantificacional superior; no podemos aquí dar cuenta de ellos.

§ 43. La aritmetización gödeliana de la sintaxis

Hasta 1933 todos los estudios sintácticos habían sido llevados a cabo en el lenguaje cotidiano (alemán, polaco, inglés o francés). Gödel fue el primero en intentar formalizar la sintaxis de la lógica como un cálculo. Ante todo formalizó la teoría numérica elemental dentro del marco de la lógica cuantificacional elemental. Luego tradujo toda la sintaxis moderna al idioma de la teoría numérica elemental. El cálculo resultante es llamado a veces *sintaxis aritmética gödeliana*.

La idea directriz de la sintaxis gödeliana es: 1. correlacionar números con signos, fórmulas y pruebas de un cálculo dado, y 2. definir todos los predicados sintácticos que gobiernan los signos, fórmulas y pruebas de tal cálculo como predicados que gobiernan sus números respectivos.

Consideremos, por ejemplo, el cálculo sentencial S. Sus signos primitivos: '*p*', '*q*', '*r*', '*s*', '', '(', ')', '—' y '∨' pueden ser correlacionados con los nueve primeros números enteros del siguiente modo:

'*p*' con 1,
'*q*' con 2,
'*r*' con 3,
'*s*' con 4,
'' con 5,
'(' con 6,
')' con 7,
'—' con 8,
'∨' con 9.

A su vez, pueden correlacionarse secuencias finitas de signos de S (es decir, fórmulas de S) con números mediante la convención siguiente:

Dada una fórmula x de S, consistente en n signos de S respectivamente correlacionados con los números k_1, k_2 ..., k_n, x será entonces correlacionado con el número:

$$p_1^{k_1} \times p_2^{k_2} \times \ldots \times p_n^{k_n}$$

donde p_n es el número primo$_n$ en el orden de magnitud.

Por ejemplo, supongamos que x sea '$(p \vee q)$'; según la convención anterior, x será correlacionado con:

$$2^6 \times 3^1 \times 5^9 \times 7^2 \times 11^7.$$

Este expediente nos permite claramente computar el número de cualquier fórmula de S; nos permite también restablecer cualquier fórmula de S partiendo de su número, pues la factorización de un número en sus factores primos es única.

Como los números desempeñan ahora el papel de signos de S, de fórmulas de S (es decir, de secuencias de signos de S) y de pruebas en S (es decir, de secuencias de secuencias de signos de S), todas las locuciones sintácticas enumeradas en las dos secciones anteriores, tales como 'x es un signo de S', 'x es un axioma de S', 'x es una prueba en S', etc., pueden ser definidas como expresiones numéricas. Por ejemplo, la locución 'x es un signo de S' puede ser definida como sigue:

$$x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3 \vee x = 4 \vee x = 5 \vee x = 6 \vee x = 7 \vee x = 8 \vee x = 9;$$

la locución 'x es un axioma de S' puede ser definida, a su vez, como sigue:

$x = 2^6 \times 3^8 \times 5^6 \times 7^1 \times 11^9 \times 13^2 \times 17^7 \times 19^9 \times 23^1 \times 29^7 \vee x = 2^6 \times 3^8 \times 5^2 \times 7^9 \times 11^6 \times 13^1 \times 17^9 \times 19^2 \times 23^7 \times 29^7 \vee$ etc.....

Una vez completada esta traducción, todos los teoremas de la sintaxis de S, tales como:

S es consistente,
S es completo,
S es decidible,

y así sucesivamente, se convierten en teoremas de la teoría numérica elemental, la prueba de los cuales puede ser llevada a cabo dentro de dicha teoría numérica.

Mediante tal aritmetización de la sintaxis, Gödel logró probar su teorema de 1933. Mostró que existe un enunciado de la sintaxis que es susceptible de prueba si y sólo si es falso. Pero la sintaxis puede ser convertida en un fragmento de la teoría numérica elemental. Si así es, existe un enunciado de la teoría numérica elemental que, según se observó antes, es susceptible de prueba si y sólo si es falso. Mas la teoría numérica elemental puede ser convertida en un fragmento de la lógica cuantificacional superior. Si así es, existe un enunciado de la lógica cuantificacional superior que es susceptible de prueba si y sólo si es falso. Fácil resulta inferir de ello que, como se indicó antes, la lógica cuantificacional superior es o incompleta o inconsistente.

§ 44. El concepto de designación

Hasta ahora hemos tratado nuestras lógicas como puros cálculos. Corresponde a la semántica y a la pragmática

dar una cierta interpretación de ellos. Interpretar un cálculo es, entre otras cosas, asignar *designata* a sus signos primitivos; sentar las condiciones en las cuales sus fórmulas bien formadas son válidas, indeterminadas o contra válidas caso que tales fórmulas sean esquemas, o verdaderas o falsas caso que tales fórmulas sean enunciados; y asignar *significata** a sus signos primitivos. Por lo común se estima que las dos primeras operaciones pertenecen a la semántica; la tercera, a la pragmática.

Deben asignarse *designata* a por lo menos dos clases de signos en un cálculo dado: primero, a sus variables; y segundo, a sus nombres constantes. Deben asignarse *designata* a todas las variables de un cálculo dado, porque las variables pueden ser cuantificadas existencialmente, y un enunciado gobernado por un cuantificador existencial puede ser verdadero sólo si la variable mostrada en el cuantificador en cuestión tiene por lo menos un *designatum*. Consideremos, por ejemplo, los dos enunciados:

$$(Ex)\ (x \text{ es un hombre}) \qquad (1)$$

y:

$$(Ex)\ (x \text{ es un número par}) \qquad (2).$$

Como el cuantificador '*(Ex)*' se lee 'Existe por lo menos un *x* tal, que', los dos enunciados (1) y (2) serán verdaderos si existe por lo menos un hombre y existe por lo menos un número par que sirvan respectivamente como *designata* de la variable '*x*' del cuantificador '*(Ex)*'.

También deben asignarse *designata* a todos los nombres constantes de un cálculo, porque los nombres constan-

* Empleamos casi siempre 'designata' y 'significata' —y luego 'designatum'— como términos técnicos, para evitar las ambigüedades adscritas a vocablos como 'designaciones' y 'significaciones'.

tes son ejemplos de variables y, por ende, deben cumplir con todos los requerimientos semánticos impuestos sobre las variables. Si, por ejemplo, el nombre constante 'Strawinski' debe servir como un ejemplo de la variable '*y*', entonces hay que asignar un *designatum* a 'Strawinski'. Obsérvese, en efecto, que el esquema cuantificacional:

y es un hombre ⊃ *(Ex)* (*x* es un hombre)

es válido; así, si 'Strawinski' puede servir como un ejemplo de '*y*', el condicional:

Strawinski es un hombre ⊃ *(Ex)* (*x* es un hombre)

será, por lo tanto, lógicamente verdadero, y el enunciado existencial:

(Ex) (*x* es un hombre)

será verdadero si:

Strawinski es un hombre

es verdadero.

La misma observación es aplicable si empezamos con la constante '2' y el esquema válido:

y es un número par ⊃ *(Ex)* (*x* es un número par).

El condicional:

2 es un número par ⊃ *(Ex)* (*x* es un número par)

será lógicamente verdadero, y el enunciado existencial:

(Ex) (*x* es un número par)

será verdadero si:

2 es un número par

es verdadero.

Es habitual llamar a las entidades no especificadas designadas por una variable como *'x'*, *los valores de 'x'*, y a la clase a la cual pertenecen tales valores, *el ámbito de 'x'*. Es habitual, por otro lado, llamar a la entidad especificada designada por un nombre constante su *designatum*.

Se sigue de lo anterior que los valores de una variable son los *designata* respectivos de sus ejemplos. Por ello:

1. *si* una expresión debe servir como ejemplo de una variable dada, debe designar uno de los valores de tal variable;
2. si una variable debe englobar una expresión dada entre sus ejemplos, debe englobar entre sus valores el *designatum* de tal expresión.

Obsérvese, sin embargo, que una letra dada puede perfectamente tener ejemplos sin tener valores y, por ende, sin ser una variable, si los ejemplos en cuestión no tienen *designata*. Por ejemplo, en lógica sentencial podíamos considerar a enunciados como ejemplos de las cuatro letras *'p'*, *'q'*, *'r'* y *'s'*, sin convertir automáticamente estas letras en variables, porque no habíamos asignado *designata* a enunciados. Es usual reservar el nombre 'variable' para letras ejemplificables tales como *'w'*, *'x'* *'y'* y *'z'*, que poseen valores propios, y llamar meramente *letras* a las letras ejemplificables tales como *'p'*, *'q'*, *'r'* y *'s'*, que no po-

seen valores propios. En los capítulos precedentes hemos obedecido sistemáticamente tal convención.

Podemos concluir, pues, diciendo que deben asignarse *designata* a todos los signos cuantificables y a todos los ejemplos de signos cuantificables de un cálculo. Algunos lógicos han argüido recientemente que deben asignarse también *designata* tanto a los signos no cuantificables de un cálculo como a sus signos cuantificables. No debatiremos este punto. Lo que importa en semántica es el grupo de signos a los cuales *deben* asignarse *designata* en un cálculo dado. El grupo de signos a los que *pueden* asignarse, pero a los que no *necesitan* asignarse, *designata*, pueden ser manejados de acuerdo con las preferencias individuales. En este espíritu de neutralidad hemos tratado las tres letras '*F*', '*G*' y '*H*' de la lógica cuantificacional elemental como *letras* simplemente, que pueden designar, pero que no necesitan designar, propiedades. No obstante, en la lógica cuantificacional superior las tres letras '*F*', '*G*' y '*H*' están sometidas a cuantificación y, por consiguiente, deben ser tratadas como variables.

§ 45. La controversia sobre las entidades abstractas

Recientemente se ha suscitado un debate sobre los tipos de entidades que un cálculo dado debe reconocer como los valores de sus variables o signos cuantificables. En la segunda década de este siglo se había ya discutido acerca del género de propiedades y clases que la lógica cuantificacional superior y la matemática debían endosar como valores de sus propias variables predicados y variables de clases. Algunas propiedades pueden ser compartidas por un número finito o infinito de entidades y algunas clases pueden consistir en un número finito o infinito de

entidades. Limitándonos a las clases, podemos recordar que los lógicos y matemáticos clásicos desde Cantor habían admitido varios tipos de clases infinitas:

1. clases que poseen el mismo número de miembros que la clase de los números naturales;
2. clases que poseen el mismo número de miembros que la clase de los números reales,

y así hasta el infinito, siendo las clases de cada grupo mayores que las clases del grupo anterior.

Uno de los contemporáneos de Cantor, el matemático alemán Leopold Kronecker, y, a comienzos de este siglo, el matemático holandés L. E. J. Brouwer, se opusieron, por varias razones epistemológicas, al supuesto de las clases infinitas mayores que la clase de los números naturales. Con ello cercenaron aproximadamente una mitad del universo de clases endosado por Cantor, Frege, Whitehead y Russell como valores de sus variables.

La filosofía brouweriana del infinito, llamada usualmente *intuicionismo*, consiguió el favor de pocos lógicos o matemáticos, pero planteó un problema decisivo: el del *status* existencial de las clases. Este problema ha sido reavivado en la cuarta década de este siglo por algunos escritores europeos, tales como Chwistek y sus seguidores, y por algunos norteamericanos, tales como Quine y Nelson Goodman, quienes por varias razones epistemológicas y metafísicas se han negado a admitir el supuesto de las clases, tanto finitas como infinitas. La controversia resultante entre los platónicos —que abogan por las entidades abstractas— y los nominalistas —que no las reconocen— está ahora ya casi terminada. Ha pasado por cuatro principales fases.

Los nominalistas presumieron al comienzo que la mayor parte de las matemáticas podía ser extraída de su con-

texto clásico y engastada de nuevo en un contexto del cual estuvieran ausentes las clases (o, si no, las propiedades). Pronto se vio que sus esfuerzos eran inútiles, pues sólo algunas triviales porciones de la matemática podían ser ajustadas a un marco nominalista. Por temor a despojar a la ciencia natural de su más precioso instrumento, los nominalistas se inclinaron a admitir las clases como cierto género de ficciones, cuya existencia, aunque teóricamente injustificable, resulta pragmáticamente justificada por el papel que desempeñan en la conceptualización de lo dado. A duras penas reconciliados con los lenguajes platónicos en tanto que herramientas míticas, pero indispensables, de la ciencia, los nominalistas intentaron, sin embargo, depurar la sintaxis, la semántica y la pragmática de tales lenguajes de acuerdo con planes nominalistas. Por desgracia, sus esperanzas de mantener en el interior de la metalógica la fe que habían perdido en el interior de la lógica quedaron frustradas cuando desde Gödel quedó claro que el destino de la sintaxis está irreparablemente ligado al de la matemática. Una vez más, sólo porciones triviales de la sintaxis pudieron encajar en un marco nominalista. Por este motivo los nominalistas se retiraron hacia las posiciones de Brouwer y endosaron dentro de su sintaxis todas las porciones de la matemática clásica que Brouwer había sancionado bajo el nombre de *matemática intuicionista*. Como, a partir de Hilbert, los platónicos limitaron también su sintaxis a la matemática intuicionista de Brouwer, la consecuencia ha sido que tanto los platónicos como los nominalistas han alcanzado posiciones parecidas, los primeros con buena conciencia, con mala conciencia los últimos. Ambos están de acuerdo en su reconocimiento de las entidades abstractas. Los platónicos las reconocen como lo que hay; los nominalistas, como lo que

la ciencia debe pedir que haya si tiene que dar cuenta de lo que hay.

Inspeccionaremos ahora brevemente la lógica sentencial, la lógica cuantificacional elemental y la lógica cuantificacional superior, y enumeraremos los varios *designata* que pueden asignarse a sus signos.

(a) *Lógica sentencial.* Las letras '*p*', '*q*', '*r*', y '*s*' de la lógica sentencial no están sometidas a cuantificación y, por lo tanto, no necesitan ser tratadas como variables. En el caso, sin embargo, de que se les asignen valores, éstos serán o hechos o proposiciones o, con preferencia, valores de verdad (en la lógica bivalente, por ejemplo, lo verdadero y lo falso; en la lógica trivalente, lo verdadero, lo dudoso y lo falso, y así sucesivamente). Las conectivas '—', '∨', '·', '⊃' y '≡' no necesitan tampoco ser tratadas como nombres. Sin embargo, si se les asignan *designata*, éstos serán funciones proposicionales con valores de verdad como argumentos y valores.* La conectiva '—', por ejemplo, puede ser considerada como nombre de la función proposicional singular llamada *negación*, cuyo valor es lo falso cuando su argumento es lo verdadero y cuyo valor es lo verdadero cuando su argumento es lo falso.

(b) *Lógica cuantificacional elemental.* Las cuatro letras '*w*', '*x*', '*y*' y '*z*' del cálculo cuantificacional elemental están sometidas a cuantificación y deben por ello ser tratadas como variables. Sus valores, a los cuales llamaremos *individuos*, son o entidades concretas o entidades abstractas o ambas; ello depende de las constantes que

* Obsérvese que usamos aquí el término 'valor' en dos diferentes acepciones: primero, como la entidad no especificada designada por una variable; segundo, como el referente de una función. Las funciones proposicionales de que aquí hablamos son llamadas con frecuencia *funciones de verdad*.

son admitidas en cada caso como ejemplos de sustitución de '*w*', '*x*', '*y*' y '*z*'. Las tres letras '*F*', '*G*' y '*H*' no están sometidas a cuantificación y, por consiguiente, no necesitan tratarse como variables. No obstante, si se les asignan valores, éstos serán propiedades *n*-ádicas (donde $n \geqslant 1$) o, como si fueran calificadas con frecuencia en el pasado, *funciones proposicionales n-ádicas*, con individuos como argumentos y proposiciones o valores de verdad como valores. Por ejemplo, la letra '*F*' en el esquema '*Fx*' puede ser considerada como designando una función proposicional cuyo valor es lo verdadero cuando '*F*' es verdadero de *x*, y cuyo valor es lo falso cuando '*F*' no es verdadero de *x*. Los dos cuantificadores '(*x*)' y '(*Ex*)' no necesitan tampoco ser tratados como nombres. Sin embargo, en el caso de que se les asignen, éstos serán respectivamente las dos funciones proposicionales llamadas *universalización* y *particularización*, con funciones proposicionales como argumentos y proposiciones o valores de verdad como valores. Por ejemplo, el cuantificador '(*x*)' en el esquema '(*x*) *Fx*' puede ser considerado como designando una función cuyo valor es lo verdadero cuando '*F*' es verdadero de todo, y cuyo valor es lo falso cuando '*F*' no es verdadero de todo.

(c) *Lógica cuantificacional superior.* Hemos bosquejado en §38 y §39 dos versiones de la teoría de los tipos como lógica cuantificacional superior.

1. En la llamada *versión intensional*, las cuatro letras 'w^0', 'x^0', 'y^0' y 'z^0' tomarán como valores entidades del tipo 0, y las tres letras 'F^m', 'G^m' y 'H^m', ahora sometidas a cuantificación, tomarán como valores entidades del tipo *m* (donde $m \geqslant 1$), es decir, propiedades o funciones proposicionales del tipo *m* (donde $m \geqslant 1$). Las clases y las relaciones pueden ser acomodadas respectivamente como

extensiones de propiedades o de funciones proposicionales monádicas y diádicas.

2. En la llamada *versión extensional*, las cuatro letras 'w^0', 'x^0', 'y^0' y 'z^0' tomarán también como valores entidades del tipo 0, y las cuatro letras 'w^n', 'x^n', 'y^n' y 'z^n', tomarán como valores clases del tipo n (donde $n \geqslant 1$). Las relaciones diádicas pueden ser acomodadas como clases de pares ordenados. Observemos que las tres letras 'F', 'G' y 'H' no están ya sometidas a cuantificación y no serán tratadas como variables, pues las propiedades o las funciones proposicionales han sido aquí eliminadas en favor de las clases. La letra 'ε' no será tampoco tratada como un nombre, pues todas las relaciones (incluyendo la relación de pertenencia) han sido identificadas con clases de pares ordenados.

§ 46. Los conceptos de validez y de verdad

Puesto que una fórmula bien formada del cálculo sentencial se compone de letras sentenciales, conectivas y paréntesis, no puede decirse de ella que sea verdadera o falsa. Sin embargo, puede decirse de ella que es válida, contraválida o indeterminada. Estos tres conceptos han sido definidos de modo informal en § 8. Vale la pena definirlos aquí de nuevo de manera más rigurosa*. Ello puede llevarse a cabo más fácilmente que de ningún otro modo asignando valores —los llamados valores de verdad (V) y falsedad (F)— a las letras sentenciales 'p', 'q', 'r', 's' y tratando, por lo tanto, estas letras como variables sentenciales.

Dando por supuesto, a los efectos perseguidos, que ta-

* A tal efecto usaremos aquí variables metalógicas, artificio que hasta el presente habíamos logrado evitar.

les letras sentenciales alcanzan V y F, sentamos ante todo las condiciones en las cuales una fórmula bien formada del cálculo sentencial, que llamaremos A, queda satisfecha mediante cierta asignación de valores de verdad, que llamaremos As_A, a las letras sentenciales que aparecen en A. Estas condiciones son:

(a) Si A es una letra sentencial, y si se asigna T en As_A a tal letra, A queda satisfecha mediante As_A;

(b) Si A tiene la forma $\sim$B, y si B no queda satisfecha mediante As_A, A queda satisfecha mediante As_A;

(c) Si A tiene la forma (B $\vee$ C), y si o B o C o ambas quedan satisfechas mediante As_A, A queda satisfecha mediante As_A.

Acto seguido podemos declarar que A es válida si A queda satisfecha mediante cualquier posible asignación As_A de valores de verdad a las letras sentenciales que aparezcan en A; que es indeterminada si A queda satisfecha mediante algunas de tales asignaciones (bien que no todas ellas); y que es contra-válida si A no queda satisfecha mediante ninguna de tales asignaciones.

Con la primera de las últimas tres definiciones a nuestra disposición es fácil mostrar, siguiendo a Post, que una fórmula bien formada del cálculo sentencial es un teorema si y sólo si es válida, obteniendo con ello los varios corolarios del resultado de Post indicados en § 43.

Dando por supuesto que las letras '*p*', '*q*', '*r*' y '*s*' alcanzan los dos valores de verdad, V y F; que las letras '*w*', '*x*', '*y*' y '*z*' alcanzan los miembros de algún conjunto —o, como a veces se dice, dominio, D, de individuos—; y que las letras '*F*', '*G*' y '*H*' alcanzan funciones proposicionales cuyos argumentos son miembros de D y cuyos valores de verdad son V o F, podríamos igualmente sentar las condiciones en las cuales puede decirse que una fórmu-

la bien formada del cálculo cuantificacional queda satisfecha mediante cierta asignación de valores de verdad a las letras sentenciales (caso de haberlas) que aparezcan en la fórmula; de miembros de D, a las letras argumentos libres (caso de haberlas) que aparezcan en la fórmula; y de las funciones proposicionales de especie apropiada, a las letras predicado (caso de haberlas) que aparezcan en la fórmula. Una vez llevado esto a cabo podemos pasar a las nociones de validez, indeterminación y contravalidez cuantificacionales, y armarnos así para probar el teorema gödeliano de completitud, esto es, el de que una fórmula bien formada del cálculo cuantificacional es un teorema si y sólo si es válida. Sin embargo, por razones de espacio dejaremos las cosas en este punto.

En oposición a lo que sucede con las fórmulas bien formadas de una forma lingüística tal como el cálculo sentencial o el cálculo cuantificacional, las fórmulas bien formadas de un lenguaje pueden en ciertas ocasiones convertirse en enunciados y, por ende, puede decirse de ellas en ciertas ocasiones que son o verdaderas o falsas. Tarski ha mostrado cómo definir los citados conceptos para una amplia familia de lenguajes. Reproduciremos aquí sus instrucciones en relación con un lenguaje modelo L.

Para simplificar las cosas, daremos por supuesto que tal lenguaje posee, como signos primitivos, un número no especificado de predicados monádicos, un número no especificado de argumentos, un número infinito de letras argumentos, las dos conectivas '—' y '∨', y los dos paréntesis '(' y ')'.

Las etapas a seguir son las siguientes. Primero debe elegirse un dominio de individuos, D; asignar como sus valores a las letras argumentos de L los miembros de D; asignar como sus *designata* a los argumentos de L varios

miembros de D; y asignar como sus *designata* a los predicados de L varias funciones proposicionales del tipo arriba descrito o, para simplificar las cosas, varios subconjuntos de D. Luego se deben sentar las condiciones en las cuales una fórmula bien formada de L —llamémosla A— queda satisfecha mediante una cierta asignación de miembros de D —llamémoslos As_A— a las letras argumentos de L que aparezcan en A. Estas condiciones son las siguientes:

(a) Si A consiste en un predicado seguido de un argumento, A queda satisfecha mediante As_A si el miembro de D designado por el argumento en cuestión pertenece al subconjunto de D designado por el predicado en cuestión;

(b) Si A consiste en un predicado seguido de una letra argumento, A queda satisfecha mediante As_A si el miembro de D asignado por As_A a la letra argumento en cuestión pertenece al subconjunto de D designado por el predicado en cuestión;

(c) Si A tiene la forma $\sim B$, y si B no queda satisfecha mediante As_A, A queda satisfecha mediante As_A;

(d) Si A tiene la forma $(B \vee C)$ y si B o C o ambas quedan satisfechas mediante As_A, A queda satisfecha mediante As_A;

(e) Si A consiste en un cuantificador universal seguido por una fórmula bien formada, B, y la letra argumento que aparece en el cuantificador en cuestión no es libre en B, A queda satisfecha mediante As_A si B queda satisfecha mediante As_A;

(f) Si A consiste en un cuantificador universal seguido por una fórmula bien formada, B, y la letra argumento que aparece en el cuantificador es libre en B, A queda satisfecha mediante As_A si B queda satisfecha mediante As_A

cualquiera que sea el miembro de D designado por la letra argumento en cuestión.

El paso final dado en la definición de Tarski es el declarar verdadera cualquier fórmula bien formada, A, de L que no contenga ninguna letra argumento libre de L (o justamente sea una sentencia de L) y quede satisfecha mediante toda posible asignación As_A de miembros de D a las letras argumentos de L que aparezcan en A; y falsa, cualquier fórmula bien formada, A, de L que no contenga ninguna letra argumento libre de L y no sea verdadera.

No podemos entrar aquí en los méritos de la definición de Tarski. Baste decir que su definición rinde como corolario el famoso bicondicional mencionado en § 40.

§ 47. Pragmática

El segundo y último paso en la interpretación de un cálculo dado consiste en asignar *significata* o significaciones a sus constantes* Por lo común se hace esto traduciendo las constantes en cuestión al lenguaje cotidiano y transfiriendo a las constantes cualesquiera significaciones que su traducción tenga en el lenguaje cotidiano. Es habitual, por ejemplo, traducir constantes como '—' '∨', '(x)' y 'ε', por 'no', 'o', 'para todos los x' y 'pertenece a', y asignarles cualesquiera significados tengan las cuatro expresiones 'no', 'o', 'para todos los x' y 'pertenece a' en el lenguaje cotidiano.

Sin embargo, muchos lógicos han exigido reciente-

* Las variables y letras no poseen significación propia aparte la que se deriva del hecho de ser ejemplificables como constantes en un cálculo dado. Por ejemplo, letras como 'p', 'F' y 'x' no tienen significación en la lógica cuantificacional aparte la que derivan del hecho de ser ejemplificables como enunciados, constantes predicados y constantes individuales respectivamente.

mente un más completo análisis del ambiguo vocablo 'significación'. Varias posiciones han sido también tomadas en esta cuestión candente. La mayor parte de los lógicos están de acuerdo en rechazar la identificación de las significaciones con las entidades mentales, aun cuando no sea sino por el discutible carácter del adjetivo 'mental'. Por desgracia, su acuerdo no va más allá.

Algunos lógicos consideran las significaciones como entidades abstractas de alguna especie expresadas mediante constantes significativas, y les dan el nombre de *conceptos*. Las significaciones de las dos locuciones 'la actual Reina de Inglaterra' y 'la actual Reina de Francia' serían, así, dos conceptos expresados respectivamente mediante las locuciones en cuestión. Cuando un signo dado tiene un *designatum*, el concepto que expresa es, además, calificado como el concepto de su *designatum*. Así, el concepto expresado en la locución 'la actual Reina de Inglaterra' sería el concepto del *designatum* de la locución 'la actual Reina de Inglaterra', es decir, el concepto de la actual Reina de Inglaterra. Obsérvese, sin embargo, que cierto número de signos pueden expresar un concepto sin tener automáticamente un *designatum*. El concepto que expresan deja entonces de ser un *concepto de;* tal es, por ejemplo, el caso del concepto expresado por la locución 'la actual Reina de Francia'.

Podemos dar una rápida ojeada a nuestra lógica e identificar brevemente los conceptos por lo común asociados con sus constantes. Como se considera que los enunciados designan valores de verdad, puede decirse que expresan conceptos de valores de verdad o, más simplemente, proposiciones (a menos que tales proposiciones sirvan ya de *designata* a los enunciados). Como se considera que las conectivas, las constantes predicados y los

cuantificadores designan funciones proposicionales, puede decirse que expresan conceptos funcionales. Y, como, finalmente, se considera que las constantes individuales designan individuos, puede decirse que expresan conceptos individuales. Terminamos así con la siguiente tabla de *designata* y *significata:*

	Designata	*Significata*
Enunciados:	Valores de verdad	Conceptos de valores de verdad (o proposiciones)
Conectivas, cuantificadores y constantes predicados:	Funciones proposicionales	Conceptos funcionales
Constantes individuales:	Individuos	Conceptos individuales

La teoría anterior se debe esencialmente a Frege; está implícita en *Principia Mathematica* y ha sido recientemente resucitada por A. Church.

Los nominalistas se han opuesto obstinadamente a la teoría Frege-Church acerca de la significación, alegando que inunda la lógica con nuevas entidades abstractas. Han hecho a su vez y sucesivamente las dos siguientes propuestas.

1. Han basado ante todo su pragmática en la expresión 'es sinónimo con' y han identificado la significación de un signo dado con la clase de signos sinónimos con él. La significación de la locución 'la actual Reina de Inglaterra' se convierte, según ellos, en la clase de todas las frases sinónimas con la locución 'la actual Reina de Inglaterra'. Los nominalistas han convertido con ello las significaciones en entidades abstractas de una cierta especie, es decir, en clases, pero las han convertido en entidades abstractas que habían reconocido ya en la semántica. Su

propuesta es atractiva. Por desgracia, el predicado 'es sinónimo con' ha revelado ser harto indócil. Los ensayos emprendidos para fraguar axiomas que lo gobernaran han fracasado, y Nelson Goodman ha llegado inclusive a declarar que no hay nunca dos locuciones sinónimas.

2. Han recurrido luego a la psicología contemporánea y han identificado simplemente la significación de un signo dado con la clase de reacciones que, a modo de estímulo, suscita en quienes lo usan. Sin embargo, no se ha llevado a cabo ningún análisis detallado de la significación sobre esta base.

Por tales motivos, el problema de la significación, lo mismo que el de la designación, siguen siendo cuestiones abiertas. La moderna semiótica ha logrado muchos resultados en la semántica y en la pragmática de que no daremos aquí cuenta. Sin embargo, no ha conseguido ni en una ni en otra los resultados amplios y definitivos que ha logrado en la sintaxis: la época de la cosecha no ha llegado todavía.

Apéndice

BIBLIOGRAFIA

Una bibliografía completa de obras sobre lógica matemática o simbólica desde 1666 inclusive (la primera que figura en la lista es la *Dissertatio de arte combinatoria*..., de Leibniz) hasta diciembre de 1935, se halla en Alonzo Church, "A Bibliography of Symbolic Logic", *The Journal of Symbolic Logic*, volumen I (1936), pp. 121-218 y volumen III (1938), pp. 178-212 —este último subtitulado "Additions and Corrections to *A Bibliography of Symbolic Logic*"—. Las obras (libros y artículos) en esta especialidad publicadas a partir de 1936 son reseñadas o enumeradas en el mismo *Journal*, con índices periódicos de autores, temas y reseñas. Dos bibliografías seleccionadas son: E. W. Beth, *Symbolische Logik und Grundlegung der exakten Wissenschaften*, 1948, opúsculo 3 de la serie *Bibliographische Einführungen in das Studium der Philosophie*, al cuidado de I. M. Bochenski, en Berna, y Alonzo Church, "A Brief Bibliography of Formal Logic", *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, volumen 80 (1952), pp. 155-172. La bibliografía que damos a continuación contiene solamente algunos títulos dispuestos en tres grupos: I. Estudios de historia de la lógica; II. Obras de interés histórico; III. Tratados sistemáticos. Todos los títulos se refieren a libros y, en algún caso, a opúsculos. Se indican siempre las fechas de la primera edición; las ediciones posteriores se mencionan cuando se han introducido cambios en ellas. Se señalan, asimismo, cuando las hay, las traducciones españolas. Las obras del Grupo I están enumeradas en aproximado orden cronológico de los autores o épocas estudiadas; las del Grupo II, en orden cronológico de aparición; las del Grupo III, en orden alfabético de autores dentro de cada una de las secciones en que el grupo ha sido subdividido.

Grupo I: Estudios de historia de la lógica

H. Scholz, *Abriss der Geschichte der Logik*, Berlin, 1931. Hay traducción inglesa: *Concise History of Logic*, New York, 1961.

C. I. Lewis, *A Survey of Symbolic Logic*, Berkeley, California, 1918, cap. I.

J. Jφrgensen, *A Treatise of Formal Logic; Its Evolution and Main Branches, with Its Relation to Mathematics and Philosophy*, 3 vols., Copenhage & London, 1931, vol. I.

J. M. Bochenski, *Formale Logik*, Freiburg/München, 1956. Traducción inglesa revisada por Ivo Thomas: *A History of Formal Logic*, Notre Dame, Indiana, 1961.

I. M. Bochenski, *Ancient Formal Logic*, Amsterdam, 1951.

J. Lukasiewicz, *Aristotle's Syllogistic from the Standpoint of Modern Formal Logic*, Oxford, London & New York, 1951; 2ª ed., rev., 1957.

I. M. Bochenski, *La logique de Théophraste*, 2ª ed., Fribourg [Suiza], 1947.

B. Mates, *Stoic Logic*, Berkeley & Los Angeles, 1953.

K. Dürr, *The Propositional Logic of Boethius*, Amsterdam, 1951.

P. Boehner, *Medieval Logic. An Outline of Its Development from 1250 to ca. 1400*, Chicago, 1952.

E. A. Moody, *Truth and Consequence in Medieval Logic*, Amsterdam, 1953.

J. T. Clark, *Conventional Logic and Modern Logic; A Prelude to Transition*, Woodstock, Maryland, 1952.

G. Stahl, *Enfoque moderno de la lógica clásica*, Santiago de Chile, 1958.

L. Couturat, *La logique de Leibniz*, Paris, 1901.

Todas estas obras estudian la historia de la lógica desde el punto de vista de la moderna lógica matemática; todas, además, se refieren a la llamada *lógica occidental*, con la excepción de Bochenski, *Formale Logik [A History of Formal Logic]*, que trata asimismo (Parte VI) de la "lógica india" dentro de la llamada *lógica oriental*. Para un estudio más especializado de la lógica oriental, y en especial de la lógica india, desde el punto de vista de la moderna lógica matemática, puede verse: D. H. H. Ingalls, *Materials for the Study of the Navya-nyāna Logic*, Cambridge, Massachusetts, 1951.

Grupo II: Obras de interés histórico

(de Leibniz a Russell)

G. W. Leibniz, *Opuscules et fragments inédits de Leibniz, extraits de la Bibliothèque Royale de Hanovre*, al cuidado de L. Couturat, Paris, 1903.

A. De Morgan, *Formal Logic; or, the Calculus of Inference, Necessary and Probable*, London, 1847.

G. Boole, *The Mathematical Analysis of Logic, Being an Essay toward a Calculus of Deductive Reasoning*, London & Cambridge,

1847. Trad. española: *Análisis matemático de la lógica*, La Plata, 1960.

G. Boole, *An Investigation of the Laws of Thought, on which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*, London, 1854.

(La edición de obras de Boole, *George Boole's Collected Logical Works*, 2 vols., Chicago & London, 1916, al cuidado de P. E. B. Jourdain, contiene *The Mathematical Analysis of Logic* y *An Investigation of the Laws of Thought* más otros trabajos, breves, de Boole. Edición de muchos trabajos de Boole, con inclusión de *The Mathematical Analysis of Logic*, pero con exclusión de *An Investigation of the Laws of Thought*, en el volumen titulado: *Studies in Logic and Probability*, al cuidado de R. Rhees, London, 1952).

W. S. Jevons, *Pure Logic, or the Logic of Quality apart from Quantity; with Remarks on Boole's System and on the Relation of Logic and Mathematics*, London, 1864, Trad. esp.: *Lógica*, 2ª ed., Madrid, 1952.

C. S. Peirce, *Collected Papers*, vols. 2-4, al cuidado de P. Weiss, ss, Cambridge, Massachusetts, 1932-1933

J. Venn, *Symbolic Logic*, London, 1881; 2ª ed., London, 1894.

E. Schröder, *Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik)*, I, Leipzig, 1890; II, 1, Leipzig, 1891; III, 1, Leipzig, 1895; II, 2 [al cuidado de E. Müller], Leipzig, 1905.

G. Frege, *Begriffschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Halle, 1879.

G. Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau, 1884.

G. Frege, *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*, I, Iena, 1893; II, Iena, 1903.

(Hay trad. al inglés de escritos de Frege de interés lógico y filosófico en el volumen: *Philosophical Writings of G. Frege*, seleccionados y traducidos por P. Geach y M. Black, New York, 1952.)

G. Peano, *Formulaire de mathématiques*, anunciado como 5 vols., en realidad 5 ediciones, Torino, 1895-1908. La obra fue escrita por Peano en colaboración con R. Bettazzi, C. Burali-Forti, F. Castellano, G. Fano, F. Giudice, G. Vailati y G. Vivanti.

B. Russell, *The Principles of Mathematics*, I, Cambridge, 1903. Trad. española: *Los principios de las matemáticas*, Buenos Aires & México, 1951.

B. Russell, *Introduction to Mathematical Philosophy*, London, 1919. Trad. española: *Introducción a la filosofía matemática*, Buenos Aires, 1945 (notas de F. D. Jaime).

A. N. Whitehead y B. Russell, *Principia Mathematica*, I, Cambridge, 1910; II, Cambridge, 1912; III, Cambridge, 1913; 2ª ed., I, 1925; II, 1927; III, 1927. Reimpresión parcial (hasta *56), Cambridge, 1962.

Grupo III: Tratados sistemáticos

(a) *Lógica general*

E. W. Beth, *Les fondements logiques des mathématiques*, Paris-Louvain, 1950; 2ª ed., 1955.

R. Blanché, *Introduction à la logique contemporaine*, Paris, 1957.

I. M. Bochenski, *Précis de logique mathématique*, Bussum, 1949.

I. M. Copi, *Symbolic Logic*, New York, 1954.

H. B. Curry, *A Theory of Formal Deducibility*, Notre Dame, Indiana, 1950.

A. Church, *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton, I, 1956.

F. B. Fitch, *Symbolic Logic*, New York, 1952.

D. García (J. D. García Bacca), *Introducció a la logística amb aplicacions a la filosofia i a les matemàtiques*, 2 vols., Barcelona, 1934. 1b

D. García Bacca (J. D. García Bacca), *Introducción a la lógica moderna*, Barcelona, 1936.

M. Granell, *Lógica*, Madrid, 1949.

H. Hermes y H. Scholz, *Mathematische Logik. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. I. Algebra und Zahlentheorie*, 1 Teil. Heft 1, Leipzig, 1952.

D. Hilbert y W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, Berlin, 1928; 4ª ed., Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1959.

D. Hilbert y P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, 2 vols., Berlin, 1934-1939.

S. C. Kleene, *Introduction to Metamathematics*, New York & Toronto, 1952.

H. Leblanc, *An Introduction to Deductive Logic*, New York, 1955.

F. Miró Quesada, *Lógica*, Lima, 1946.

W. v. Quine, *Mathematical Logic*, New York, 1940; ed. revisada, Cambridge, Massachusetts, 1951.

W. v. Quine, *Methods of Logic*, New York, 1950; 2ª ed., revisada, 1959.

P. Rosenbloom, *The Elements of Mathematical Logic*, New York, 1950.

J. B. Rosser, *Logic for Mathematicians*, New York, 1953.

G. Stahl, *Introducción a la lógica simbólica*, Santiago de Chile, 1956.

P. Suppes, *Introduction to Logic*, New York, 1957.

A. Tarski, *O logice matematycznej i metodzie dedukcyjnej*, Lwów & Varsovia, 1936. Esta obra fue traducida al alemán con el siguiente título: *Einführung in die mathematische Logik und in die Methodologie der Mathematik*, Wien, 1937. Posteriormente apareció una traducción inglesa revisada y ampliada: *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences*, New York, 1941; 2ª ed. con leves correcciones, New York, 1946. Traducción española a base de la 2ª ed. inglesa y parte de la ed. alemana: *Introducción a la lógica y a la metodología de las ciencias deductivas*, Buenos Aires & México, 1951.

(b) *Cálculo cuantificacional*

R. Gonzalo Zubieta, *Sobre el cálculo funcional de primer orden*, México, 1950 (tesis).

(c) *Lógica modal*

C. I. Lewis y C. H. Langford, *Symbolic Logic*, New York, 1932 (y el *Survey* de C. I. Lewis mencionado en Grupo I).

G. H. von Wright, *An Essay in Modal Logic*, Amsterdam, 1951.

(d) *Lógicas polivalentes*

J. B. Rosser y A. R. Turquette, *Many-Valued Logics*, Amsterdam, 1952.

(e) *Lógica intuicionista*

A. Heyting, *Intuitionism; An Introduction*, Amsterdam, 1956.

(f) *Lógica combinatoria*

H. B. Curry y Robert Feys, *Combinatory Logic*, I, Amsterdam, 1958 (con dos secciones por W. Craig).

(g) *Semiótica*

R. Carnap, *Foundations of Logic and Mathematics*, Chicago, 1946.

C. W. Morris, *Foundations of the Theory of Signs*, Chicago, 1940. Trad. española: *Fundamentos de la teoría de los signos*, México, 1958.

C. W. Morris, *Signs, Language, and Behavior*, New York, 1946.

(h) *Sintaxis*

R. Carnap, *Logische Syntax der Sprache*, Wien, 1934. Trad. inglesa revisada: *The Logical Syntax of Language*, New York & London, 1937.

E. Nagel y J. R. Newman, *Gödel's Proof*, New York, 1958. Trad. española: *La prueba de Gödel*, México, 1959.

(i) *Semántica*

R. Carnap, *Introduction to Semantics*, Cambridge, Massachusetts, 1942.

R. Carnap, *Meaning and Necessity; a Study in Semantics and Modal Logic*, Cambridge, Massachusetts, 1947.

R. M. Martin, *Truth and Denotation; a Study in Semantical Theory*, Chicago, 1958.

W. v. Quine, *From a Logical Point of View*, Cambridge, Massachusetts, 1953.

A. Tarski, *Projecie prawdy w jezykach nauk dedukcyjnych*, Varsovia, 1933. Trad. alemana: "Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen", *Studia Philosophica*, I (1936), 261-405 (sobretiros fechados en 1935) con un *Nachwort*. Trad. inglesa de "Der Wahrheitsbegriff..." con otros escritos de Tarski sobre cuestiones lógicas, semánticas y metamatemáticas, en el volumen: *Logic, Semantics, Metamathematics (Papers from 1923 to 1938)*, seleccionados y trad. por J. H. Woodger, Oxford, 1956.

(j) *Pragmática*

R. M. Martin, *Towards a Systematic Pragmatics*, Amsterdam, 1959.

(k) *Lógica probabilitaria*

R. Carnap, *Logical Foundations of Probability*, Chicago, 1950.

Es el volumen I de una obra en dos volúmenes que lleva como título general: *Probability and Induction*. Una anticipación de parte del contenido del volumen II ha aparecido en el folleto del autor: *The Continuum of Inductive Methods*, Chicago, 1952.

H. Leblanc, *Statistical and Inductive Probabilities*, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.

H. Reichenbach, *Wahrscheinlichkeitslehre*, Leyden, 1935. Trad. inglesa muy revisada y ampliada por el autor: *The Theory of Probability*, Berkeley & Los Angeles, 1949.

abstracto, 120 *ss.*; doble, 146 *ss.*; simple, 146 *ss.*
Ackermann (W.), 189, 191
alcance, de la cuantificación, 75 *ss.*; de la funcionalidad de las relaciones, 159
álgebra, de clases, 122 *ss.*; de relaciones, 147 *ss.*
ámbito de variables, 197 *ss.*
Ammonio, 83
argumento, 67 *ss.*; individual, 71; predicado, 71
Aristóteles, 21, 63, 66, 80, 81, 84
aritmetización de la sintaxis, 192 *ss.*
asociación (ley de), 43 *ss.*, 141 *ss.*
autológico, 177
Averroes, 83
axioma, 56 *ss.*, 65, 97, 170, 172 *ss.*, 174, 182 *ss.*, 188 *ss.*, 193 *ss.*

Becker (O.), 64
Bernays (P.), 167, 189
bicondicional, 29 *ss.*, 61; (ley del), 43 *ss.*
Bochenski (I. M.), 82
Boecio, 61, 81
Boole (G.), 122
Brouwer (L. E. J.), 199, 200
Burali-Forti (C.), 164

cálculo, 51 *ss.*, 181 *ss.*; cuantificacional elemental, 98 *ss.*, 189 *ss.*; cuantificacional monádico superior, 170 *ss.*, 191; cuantificacional superior de primer orden, de segundo orden, etc., 171; sentencial, 51 *ss.*, 188 *ss.*, 192 *ss.*; (interpretación de un), 193 *ss.*
campo de una relación, 155
Cantor (G.), 164, 199
Carnap (R.), 9, 20, 64, 178
clase, 119 *ss.*, 172 *ss.*, 198 *ss.*, 202 *ss.*; nula, 127 *ss.*; universal, o universo del discurso, 127, 129
clases, infinitas, 199 *ss.*; intersecadas, 128; mutuamente exclusivas, 128, 132
columna(s) de referencia, 32 *ss.*, 60 *ss.*
complemento, de clases, 126 *ss.*, 131; de relaciones, 148 *ss.*
completitud, 57, 183 *ss.*; semántica, 186, 190
concepto, 208 *ss.*; funcional, 209 *ss.*; individual, 209 *ss.*
conclusión, 45
condicional, 26 *ss.*, 33 *ss.*, 61 *ss.*; — conjunción (ley del), 44; — disyunción (del del), 44
Condillac (E. B. de), 9
conectiva, binaria, 26 *ss.*; singular, 26 *ss.*
conectivas, 26 *ss.*, 53 *ss.*, 61, 201, 208 *ss.*
confinamiento (leyes de), 90 *ss.*
conjuntos (teoría axiomática de los), 167
conjunción, 'y', 27 *ss.*, 33, 61, 62
conmutación (leyes de), 43, 118
consecuencias modales, 66 *ss.*
consistencia, 57 *ss.*, 189 *ss.*, 194
constante, 195 *ss.*, 207 *ss.*
contingencia, 63
contradicción (ley de), 41, 140
contradictorios, 87

contrarios, 87, 88
converso de una relación, 150 *ss.*
Couturat (L.), 130
cuadro de oposición, 87 *ss.*
cuantificador, particular [existencial], 74 *ss.*, 195; universal, 73 *ss.*
cuantificadores, 67, 72 *ss.*, 202 *ss.*; numéricos, 108 *ss.*

Church (A.), 187, 190, 209
Chwistek (L.), 166, 168, 199

decidibilidad, 183 *ss.*, 194
deducción, 43; natural, 99 *ss.*
deducibilidad, 20
definición, 52 *ss.*; contextual, 52 *ss.*; explícita, 52 *ss.*; recursiva, 182
De Morgan (A.), 44, 129, 142; (leyes de), 44, 129, 142, 147
denotación, 177
descripciones, 111 *ss.*; no vacuas, 115 *ss.*; vacuas, 115 *ss.*
designación, 194 *ss.*
designatum, 195 *ss.*, 205 *ss.*
diagrama de Euler, 130, 139
diagramas de Venn, 139
dilema (ley del), 44
distribución (leyes de), 43; cuantificacional (leyes de), 90 *ss.*; de relaciones (leyes de), 154
disyunción, 27 *ss.*, 33 *ss.*, 61; exclusiva, 27 *ss.*, 33 *ss.*, 61; inclusiva, 27 *ss.*, 33 *ss.*, 61
doble negación (ley de la), 42
dominio, de una relación, 155
converso de una relación, 150
dualidad (leyes de), 44

eliminación (reglas), 100
entidad, abstracta, 71 *ss.*, 198 *ss.*, 208; concreta, 71 *ss.*
enunciado. *Véase* sentencia
equivalente estricta, 36, 65
escolásticos, 15, 23, 63, 66, 85
especificación (ley de), 86
esquema, abierto, 76 *ss.*; atómico, 68 *ss.*; cerrado, 76 *ss.*; contra-válido, 41, 79; cuantificacional, 68 *ss.*; diádico, 70 *ss.*, 146; indeterminado, 41; molecular, 70 *ss.*; monádico, 70 *ss.*, 146; poliádico, 70 *ss.*, 146; sentencial, 25 *ss.*; válido, 41 *ss.*, 79 *ss.*
estructura (reglas), 100 *ss.*
estructura lógica, 11 *ss.*
Euclides, 57, 107
Euler (L.), 130, 139
existencia, 114 *ss.*; de clases (axioma de), 174
expansión (leyes de), 45.
exportación (leyes de), 44
expresión, 9
extensionalidad (leyes de), 172 *ss.*

falacia de afirmar el consecuente, 46; de negar el antecedente, 46
Fermat (P. de), 187
Ferrater Mora (J.), 8
figura, del silogismo, 83 *ss.*; galénica, 83
Filón de Megara, 35
formación (reglas de), 56, 97, 163, 169 *ss.*, 173 *ss.*
formalismo, 20
fórmula, 189, 192 *ss.*; booleana, 140 *ss.*; bien formada, 56, 181 *ss.*; indecidible, 191; mal formada, 56; significante, 182; válida, 182; verdadera, 192
Frege (G.), 20, 24, 36, 164, 209

función, 157 *ss.*; de verdad, 201 *ss.*; proposicional, 201 *ss.*; sentencial, 76

Galeno, 83
Gaos (J.), 23
Gentzen, 99, 100, 102
Gödel (K.), 190, 191, 192, 194, 200
Goodman (N.), 199, 210
gráficos, de clases, 129 *ss.*; de silogismos, 134 *ss.*
Grelling (K.), 178
Guillermo de Occam. *Véase* Occam

heterológico, 177
Hilbert (D.), 189, 191, 200

identidad (leyes de), 41 *ss.*, 140; (lógica de la), 103 *ss.*; (signo de), 103 *ss.*; de clases, 124 *ss.*, 131 *ss.*; de relaciones, 147 *ss.*
imagen de relaciones, 148
implicación, 28; *estricta*, 36 *ss.*, 65 *ss.*; material, 36 *ss.*, 65 *ss.*
imposibilidad, 63 *ss.*
inclusión, 105; de clases, 122 *ss.*, 130; de relaciones, 147 *ss.*
independencia, 57, 187 *ss.*
individuos, 162, 168, 172, 202 *ss.*
inferencia (reglas de), 46 *ss.*, 57, 65, 97 *ss.*, 170 *ss.*, 182 *ss.*, 188 *ss.*
inserción (reglas de), 48 *ss.*, 99 *ss.*
intercambio (regla de), 48 *ss.*, 97
interdefinición de conectivas, 53 *ss.*, 128 *ss.*
interpretación existencial y no existencial de A y E, 88 *ss.*
introducción (reglas), 100 *ss.*
intuicionismo, 199 *ss.*

jerarquía de lenguajes, 16 *ss.*, 178 *ss.*
Jourdain (E. B.), 177
juicio, 23 *ss.*

Kant (I.), 20
König (J.), 164
Kronecker (L.), 199
Kuratowski (K.), 166

Leblanc (H.), 8
Leibniz (G. W.), 106, 130, 173; (principio de), 106, 173
lenguaje, 9 *ss.*, 51 *ss.*; (alcances del), 10
lenguajes (jerarquía de). *Véase* jerarquía de lenguajes
letra, argumento, 68 *ss.*, 94 *ss.*, 161 *ss.*, 197, 202 *ss.*, 207; encapuchada, 122 *ss.*; libre, 76 *ss.*; ligada, 76 *ss.*; predicado, 68 *ss.*, 197 *ss.*, 201 *ss.*; sentencial, 24 *ss.*, 197, 201 *ss.*, 203
Lewis (C. I.), 36, 64, 65
leyes, del álgebra de clases, 139; del álgebra de relaciones, 149 *ss.*; de la lógica cuantificacional, 78 *ss.*; de la lógica de las descripciones, 115 *ss.*; de la lógica de la identidad, 105 *ss.*; de la lógica sentencial, 42 *ss.*
lógica, clásica, 23 *ss.*; cuantificacional elemental, 67 *ss.*, 201 *ss.*; cuantificacional superior, 161 *ss.*, 202 *ss.*; deductiva, 19 *ss.*; de la identidad, 103 *ss.*; de las clases, 119 *ss.*; de las relaciones, 145 *ss.*; formal, 20 *ss.*; formalizada, 21 *ss.*, 51; inductiva, 19 *ss.*; modal, 63 *ss.*; polivalente, 59 *ss.*; proba-

bilitaria, 20, 62; sentencial, 23 *ss.*, 201 *ss.*; trivalente, 59 *ss.*
Lukasiewicz (J.), 21, 59, 82, 83

Mac Coll (H.), 63
matemática, 191, 199 *ss.*
mención, 14 *ss.*
metalenguaje, 16 *ss.*, 178 *ss.*
metalógica, 17 *ss.*, 181 *ss.*
miembro de clase, 119 *ss.*, 123
modalidades, 63 *ss.*
modos, del silogismo, 83 *ss.*; válidos, 85 *ss.*
modus ponens, 45, 47
modus tollens, 47

necesidad, 63 *ss.*
negación, 26 *ss.*, 33, 61; alternativa, 54; conjunta, 54 *ss.*
Nelson (L.), 178
Neumann (J. von), 167, 191
Nicod (J.), 189
nombre propio, 114 *ss.*, 195 *ss.*
nominalismo, 199 *ss.*, 209 *ss.*
números (teoría de los), 191 *ss.*

objeto-lenguaje, 16 *ss.*
Occam (G.), 44
oposición, aristotélica (leyes de), 80 *ss.*; diádica (leyes de), 91; simple (leyes de), 79 *ss.*

paradojas, lógicas, 163 *ss.*; (soluciones a las), 166 *ss.*; metalógicas, 168, o semánticas, 175 *ss.*
paréntesis, 29 *ss.*
particularización (ley de), 86 *ss.*
partículas, fácticas, 10 *ss.*; lógicas, 10 *ss.*
Peirce (C. S.), 36, 147
permutación (leyes de), 92 *ss.*
pertenencia, 105, 119 *ss.*, 123, 173
platonismo, 199 *ss.*
posibilidad, 63 *ss.*
Post (E. L.), 59, 188, 189
pragmática, 18 *ss.*, 194 *ss.*, 207 *ss.*
predicación, 105
predicado, 67 *ss.*
premisa, 45 *ss.*; mayor, 82 *ss.*; menor, 82 *ss.*
producto de clases, 125 *ss.*, 131; de relaciones, 148; relativo de relaciones, 152 *ss.*
propiedad, 120, 152, 168, 202 *ss.*; extensional, 172; impredicable, 165 *ss.*; intensional, 172; predicable, 165 *ss.*
proposición, 23 *ss.*, 201, 208 *ss.*; universal afirmativa (A) y negativa (E), 72 *ss.*; particular afirmativa (I) y negativa (O), 72 *ss.*
prueba, 45, 49 *ss.*, 58 *ss.*, 92 *ss.*, 182 *ss.*, 193 *ss.*

Quine (W. v.), 167, 199

Ramsey (F. P.), 166, 168
reescritura (ley de), 94, 97 *ss.*
reflexividad (ley de), 106 *ss.*, 118
Reichenbach (H.), 62
relación, 145 *ss.*, 202 *ss.*, asimétrica, 156 *ss.*; intransitiva, 156 *ss.*; irreflexiva, 155 *ss.*; no reflexiva, 155 *ss.*; no simétrica, 156 *ss.*; no transitiva, 157 *ss.*; reflexiva, 155 *ss.*; simétrica, 156 *ss.*; transitiva, 156 *ss.*; de muchos a uno, 157 *ss.*; nula, 149, universal, 149; de uno a muchos, 157 *ss.*; de uno a uno, 158 *ss.*
relaciones (propiedades de las), 155 *ss.*

Richard (J.), 164
Rosser (J. B.), 167
Russell (B.), 65, 113, 164, 166, 167, 168, 169, 178, 188, 189, 190, 191, 199

semántica, 18 *ss.*, 194 *ss.*
semicomillas, 14 *ss.*
semiótica, 18 *ss.*, 181 *ss.*, 210
sentencia, 23 *ss.*, 208 *ss.*; atómica, 24 *ss.*; molecular, 24 *ss.*
separación (regla de), 47 *ss.*, 57, 97 *ss.*
ser, 104 *ss.*, 123 *ss.*
Sexto, el Empírico, 81
Sheffer (M. N.), 54, 55
significatum, 195 *ss.*, 207 *ss.*
signo, 9 *ss.*; —acontecimiento, 9; definido, 52 *ss.*, 97, 163; interpretado, 51 *ss.*; —modelo, 9 *ss.*; no interpretado, 51 *ss.*; primitivo, 52 *ss.*, 97, 162 *ss.*, 170, 173, 181, 192 *ss.*
silogismo, categórico, 80 *ss.*, 132 *ss.*; (leyes del), 80 *ss.*; hipotético (leyes del), 43 *ss.*, 80
simetría (ley de), 107
simplificación (leyes de), 43
sinonimia, 209 *ss.*
sintaxis, 18 *ss.*, 181 *ss.*; aritmética, 192 *ss.*
subalternación (ley de), 87 *ss.*
subalternos, 88 *ss.*
subcontrarios, 88 *ss.*
suma, de clases, 125, 130; de relaciones, 148
suposición, 15 *ss.*
sustitución (regla de), 57, 97
sustitutividad de la identidad (ley de la), 106 *ss.*, 118
tablas de verdad, 30 *ss.*, 60 *ss.*
Tarski (A.), 59, 176, 178, 205, 207
tautología, 37 *ss.*, 56, 79, 189
Teofrasto, 63, 81
teorema, 58 *ss.*, 65, 182 *ss.*
tercio excluso (ley del), 41 *ss.*, 140
término, mayor, 82 *ss.*; medio, 82 *ss.*; menor, 82 *ss.*
tipos (teoría extensional de los), 167 *ss.*, 171 *ss.*, 202 *ss.*; (teoría intensional de los), 166 *ss.*; (teoría ramificada de los), 166 *ss.*, 191; (teoría simple de los), 166 *ss.*
transitividad (ley de), 43, 107, 118
transposición (ley de), 44

unión (regla de), 47 *ss.*
universalización (regla de), 97 *ss.*
uso, 14 *ss.*

Vacca (G.), 130
validez, 203 *ss.*
valor de verdad, 31 *ss.*, 59 *ss.*, 202, 208 *ss.*
valores de variables, 197 *ss.*
variable, 195 *ss.*, 207 *ss.*; de tipo sintáctico, 169; individual, 162; predicado, 162
Venn (J.), 139, 190
verdad, 175 *ss.*; 203 *ss.*; lógica, 12 *ss.*
vocabulario lógico, 13

Wallies (M.), 83
Wang (Hao), 167
Whitehead (A. N.), 188, 189, 190, 191, 199
Wiener (N.), 166

Zermelo (E.), 167

ÍNDICE GENERAL

Prólogo a la primera edición 7
Nota a la segunda edición 8

I. *Naturaleza de la lógica* 9

§ 1. El lenguaje lógico 9
§ 2. Lenguaje y metalenguaje 13
§ 3. Semiótica 17
§ 4. Lógica deductiva y lógica inductiva . . . 19
§ 5. El formalismo en la lógica 20

II. *Lógica sentencial* 23

§ 6. Juicio, proposición y sentencia 23
§ 7. Conectivas 26
§ 8. Tablas de verdad 30
§ 9. Tautologías. Leyes de la lógica sentencial 40
§10. La prueba en la lógica sentencial 45
§11. Cálculo sentencial 51
§12. Lógicas polivalentes 59
§13. Lógicas modales 63

III. *Lógica cuantificacional* 67

§14. Argumento y predicado 67
§15. Los cuantificadores 'todos' y 'algunos' . . 72
§16. Leyes de la lógica cuantificacional . . . 78
§17. La prueba en la lógica cuantificacional . 92
§18. Cálculo cuantificacional 96
§19. La deducción natural 99

IV. *Lógica de la identidad* 103

§20. El signo de identidad 103
§21. Leyes de la lógica de la identidad . . . 105
§22. Cuantificadores numéricos 108
§23. Descripciones 111

V. *Lógica de las clases* 119

§24. La noción de clase 119
§25. Nociones de álgebra de clases 122
§26. Representación gráfica de las clases . . 129
§27. El silogismo en el álgebra de clases . . 132
§28. Leyes del álgebra de clases 139

VI. *Lógica de las relaciones* 145

§29. La noción de relación 145
§30. Nociones del álgebra de relaciones . . . 147
§31. Leyes del álgebra de relaciones 149
§32. Converso, producto relativo e imagen . . 150
§33. Propiedades de las relaciones 155
§34. Funciones 157

VII. *Lógica cuantificacional superior* 161

§35. La ampliación del lenguaje lógico . . . 161
§36. Las paradojas lógicas 163
§37. Soluciones a las paradojas lógicas 166
§38. Teoría intensional de los tipos 168
§39. Teoría extensional de los tipos 171
§40. Las paradojas metalógicas 175

VIII. *Metalógica* 181

§41. Sintaxis 181
§42. Algunos resultados en sintaxis 188
§43. La aritmetización gödeliana de la sintaxis 192
§44. El concepto de designación 194
§45. La controversia sobre las entidades abstractas 198
§46. Los conceptos de validez y de verdad . 203
§47. Pragmática 207

APÉNDICE: *Bibliografía* 211

Este libro se terminó de imprimir y encuadernar en el mes de mayo de 1992 en los talleres de Encuadernación Progreso, S. A. de C. V., Calz. de San Lorenzo, 202; 09830 México, D. F. Se tiraron 2 000 ejemplares.

El propósito que anima a José Ferrater Mora y Hugues Leblanc en este libro es presentar, mediante una exposición sucinta, clara y rigurosa, los temas fundamentales de la lógica matemática. Conocida también como lógica moderna o lógica simbólica, se acerca más que ninguna otra ciencia a un ideal inasequible: constituirse en un lenguaje perfecto. Por ello, el presente libro también aspira a "despertar en los lectores de lengua española el interés por una disciplina que ocupa un puesto singularmente destacado en el saber contemporáneo".

La lógica matemática empieza a rebasar los reducidos círculos de especialistas para ser un instrumento utilizado por grupos cada vez más amplios de estudiosos. Aquellos que se acercan por primera vez a la lectura de textos de esta índole se encontrarán con una abundancia de símbolos; sin embargo, lejos de obstaculizar su lectura, constituyen el único modo de entender cabalmente esta disciplina.

José Ferrater Mora ha publicado, además, un *Diccionario de Filosofía*, *El hombre en la encrucijada*, *La filosofía en el mundo de hoy* y *El ser y la muerte*, entre otras obras. También sobre la lógica, Hugues Leblanc ha publicado *An Introduction to Deductive Logic*.